ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1991

ТОМ 318 № 1

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 531.38 МЕХАНИКА

© И.Н. ГАШЕНЕНКО

НОВЫЙ КЛАСС ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

(Представлено академиком А.Ю. Ишлинским 10 X 1990)

Случай интегрируемости, обнаруженный С.В. Ковалевской [1] в динамике твердого тела, изучен аналитически достаточно подробно: дано общее решение [1], исследованы все частные решения [2–4], соответствующие классам [3] вырождений ультраэллиптических интегралов. Задача о движении гиростата, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии, также допускает дополнительный интеграл [5]. Однако до настоящего времени не получены зависимости, связывающие в этом случае основные переменные со временем, кроме нескольких ранее найденных частных решений [6–8]. В настоящем сообщении аналитически исследованы движения гиростата, обобщающие наиболее сложный (в терминологии [3] четвертый) класс вырожденных движений гироскопа Ковалевской.

Уравнения движения тяжелого гиростата

$$A\,\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\,\Gamma,$$
$$(1)\qquad \frac{d\nu_1}{dt} = r\nu_2 - q\nu_3 \qquad (123, pqr,\ ABC)$$

при условиях $A = B = 2C$, $e_2 = e_3 = 0$, $e_1 = 1$ и при ограничении гиростатического момента $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ запишем в безразмерных переменных:

$$(2)\qquad 2\dot{p} = (r - \lambda)\,q,\quad 2\dot{q} = -(r - \lambda)\,p - \nu_3,\quad \dot{r} = \nu_2,$$
$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3,\quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1,\quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2,$$

где $\lambda = \lambda_3\,(C/\Gamma)^{1/2}$, а точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени. Интегралы (2) известны [5]:

$$p^2 + q^2 + \tfrac{1}{2} r^2 - \nu_1 = h,\qquad 2(p\nu_1 + q\nu_2) + (r + \lambda)\,\nu_3 = g,$$
$$(3)\qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$
$$(\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 + 2\lambda[(r - \lambda)\,(p^2 + q^2) + 2p\nu_3] = k.$$

При $\lambda \neq 0$ замена переменных [4]

$$p = a - xM^{-1},\quad q = -yM^{-1},\quad r = 2z + \lambda + 4x\gamma M^{-1},\quad M = x^2 + y^2,$$
$$\nu_1 = -2\alpha + 4(x^2 - y^2)\,\gamma^2 M^{-2} + 2ax(1 - 2ax)\,M^{-1} + 4\lambda x\gamma M^{-1},$$
$$\nu_2 = -2\beta + 8xy\gamma^2 M^{-2} + 2ay(1 - 2ax)M^{-1} + 4\lambda y\gamma M^{-1},$$
$$\nu_3 = 2(1 - 2ax)\,\gamma M^{-1} - 2az$$

(параметр a пока произволен) приводит соотношения (2), (3) к виду

$$\dot{x} = yz,\quad \dot{y} = -xz - \gamma,\quad \dot{z} = \beta - yR'(a)/4,$$
$$(4)\qquad \dot{\alpha} = (2z - \lambda)\beta + y\gamma R(a) + \lambda y R'(a)/4,\quad \dot{\gamma} = y\alpha - x\beta,$$
$$\dot{\beta} = -(2z - \lambda)\,\alpha - x\gamma R(a) - a^2 z - \lambda x R'(a)/4;$$
$$(\alpha + a^2)x + \beta y + \gamma(z - \lambda) - MR'(a)/8 = a/2,$$

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha + MR(a)/2 - (z-\lambda/2)^2 - xR'(a)/2 = (a^2-h)/2,\\
&\alpha^2+\beta^2-\gamma^2R(a)+a^2z^2-\lambda\gamma R'(a)/2+a^2xR'(a)/2=(1+aR'(a))/4,\\
&\alpha(x^2-y^2)+2\beta xy-\gamma^2+a^2x^2-\lambda zM-2\lambda x\gamma-M^2R(a)/4=1/4,
\end{aligned}
$$

где $R(a) = -a^4 + a^2(2h-\lambda^2) + 2ga + 1 - k$, $R'(a) = -4a^3 + 2a(2h-\lambda^2) + 2g$. Ограничим параметры h, g, k, λ условием существования у многочлена $R(a)$ кратного корня: $R(a) = R'(a) = 0$, упрощая тем самым уравнения (4), (5):

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\dot{x} = yz,\quad \dot{y} = -xz-\gamma,\quad \dot{z}=\beta,\quad \dot{\alpha} = (2z-\lambda)\beta,\\
&\dot{\beta} = -(2z-\lambda)\alpha - a^2z,\quad \dot{\gamma} = y\alpha - x\beta,\\
&(\alpha+a^2)x+\beta y+\gamma(z-\lambda)=a/2,\\
&\alpha-(z-\lambda/2)^2=(a^2-h)/2,\quad \alpha^2+\beta^2+a^2z^2=1/4,\\
&\alpha(x^2-y^2)+2\beta xy-\gamma^2+a^2x^2-\lambda z(x^2+y^2)-2\lambda x\gamma=1/4.
\end{aligned}
$$

Из (6) находим

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dz}{dt} = \sqrt{f(z)},\quad \alpha=(z-\lambda/2)^2+(a^2-h)/2,\quad \beta=\sqrt{f(z)},\\
&f(z) = \tfrac14 - a^2z^2 - [(z-\lambda/2)^2+(a^2-h)/2]^2.
\end{aligned}
$$

В общем случае переменная z колеблется между действительными корнями $f(z)$.

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&L_1 = (2h-2a^2-\lambda^2)/16,\quad L_2=(2h-6a^2-\lambda^2)/4,\\
&L_3 = 4(a^2+\lambda^2)L_1 - 1/4,\quad F(z)=(z-\lambda)^2-L_2.
\end{aligned}
$$

Тогда из (6) следует

$$
(8)\qquad F^2(z)(\dot{\eta})^2+L_2L_3\eta^2=L_1,\quad \eta=yF^{-1/2}(z).
$$

Определив $\eta(z)$ из (8), (7), найдем

$$
\begin{aligned}
&y=\eta F^{1/2}(z),\qquad x=(\tfrac12 aL_2^{-1}+\eta\beta F^{-1/2}(z)+\dot{\eta}F^{1/2}(z)(z-\lambda)/L_2),\\
&\gamma=\tfrac12 azL_2^{-1}+\lambda\eta\beta F^{-1/2}(z)+\dot{\eta}F^{1/2}(z)(\alpha+a^2)/L_2.
\end{aligned}
$$

При решении уравнения (8) целесообразно выделить следующие возможности: I. $L_1>0$, $L_2>0$, $L_3>0$; II. $L_1>0$, $L_2<0$, $L_3<0$; III. $L_1>0$, $L_2<0$, $L_3>0$; IV. $L_1>0$, $L_2>0$, $L_3<0$; V. $L_1<0$; VI. $L_1=0$; VII. $L_2=0$; VIII. $L_3=0$.

Общим для всех этих вариантов является движение, получающееся при $x\to\infty$, $y\to\infty$, $\gamma\to\infty$. Оно полностью изучено в монографии [6]:

$$
(9)\qquad p=a,\quad q=0,\quad \dot{r}=[-r^4/4-(2a^2-h)r^2+2\lambda a^2r+1-(a^2-h)^2-a^2\lambda^2]^{1/2}.
$$

Решение уравнения (8) в невырожденных случаях I–IV приводит к квазипериодическим движениям (варианты I, II) либо к асимптотическим движениям (варианты III, IV), стремящимся при $t\to\infty$ к движению (9).

Проинтегрируем (8) в квазипериодическом случае. Для этого введем величину θ – монотонную функцию времени:

$$
\dot{\theta}=\frac{|L_2L_3|^{1/2}}{F(z)}>0.
$$

Пусть $b^2 = \dfrac{L_1}{|L_2 L_3|}$, тогда

$$y = bF^{1/2}(z)\ \sin\theta,\quad x = -(\tfrac{1}{2} aL_2^{-1} + b\beta F^{-1/2}(z)\ \sin\theta +$$
$$+\ L_1^{1/2} L_2^{-1} F^{-1/2}(z)\ (z-\lambda)\cos\theta),$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2} azL_2^{-1} + \lambda b\beta F^{-1/2}(z)\sin\theta + L_1^{1/2} L_2^{-1} F^{-1/2}(z)(\alpha + a^2)\cos\theta.$$

Асимптотические движения изучим в случае III. В прежних обозначениях находим

$$y = bF^{1/2}(z)\ \mathrm{sh}\,\theta,\quad x = -(\tfrac{1}{2} aL_2^{-1} + b\beta F^{-1/2}(z)\ \mathrm{sh}\,\theta +$$
$$+\ L_1^{1/2} L_2^{-1} F^{-1/2}(z)(z-\lambda)\ \mathrm{ch}\,\theta),$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2} azL_2^{-1} + \lambda b\beta F^{-1/2}(z)\ \mathrm{sh}\,\theta + L_1^{1/2} L_2^{-1} F^{-1/2}(z)(\alpha + a^2)\ \mathrm{ch}\,\theta.$$

В случаях VII, VIII уравнение (8) тривиально, движение гиростата асимптотически приближается к движению (9). В случае V реализуются движения только вида (9), а в симметричном случае VI возможны два вида движений (9): $p = a > 0$ и $p = -a < 0$.

Для полной классификации движений гиростата необходимо рассмотреть случаи кратных корней многочлена $f(z)$. Если z_* – кратный корень $f(z)$, тогда имеют место инвариантные соотношения

$$(10)\quad z = z_*,\quad L_2 L_3 y^2 + (L_2 x + a/2)^2 (z_* - \lambda)^{-2} F^2(z_*) = L_1 F(z_*).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что переход к переменным p, q, r приводит соотношения (10) к частному случаю решения, изученного в работе [8].

Автор благодарен П.В. Харламову за ценные замечания и внимание к работе.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
9 X 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С.В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с. 2. *Делоне Н.Б.* Математический сборник. М., 1892, т. 16, вып. 2, с. 346–351. 3. *Аппельрот Г.Г.* В кн.: Динамика твердого тела вокруг неподвижной точки. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61–155. 4. *Докшевич А.И.* – ПММ, 1981, т. 45, № 4, с. 745–749. 5. *Yehia H.M.* – J. Mécan. Théor. Appl., 1986, vol. 5, № 5, p. 755–762. 6. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. 221 с. 7. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* – ДАН, 1969, т. 189, № 5, с. 967–968. 8. *Харламов П.В.* В кн.: Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1971, вып. 3, с. 57–64.