

УДК 517.5

©2006. Е.А. Севостьянов

О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ДИЛАТАЦИЙ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОГО ИСКАЖЕНИЯ ДЛИНЫ

Работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в работах многих специалистов по теории отображений, среди которых можно назвать К.Астала, Э.Вилламора, Ф.Геринга, Т.Иванца, П.Коскела, Дж.Манфредди, Г.Мартина, О.Мартио, У.Сребро, Э.Якубова и многих других. Основными результатами являются теорема о поточечной полунепрерывности специальных внутренних дилатаций, а также теорема о полунепрерывности указанных дилатаций в среднем для некоторого подкласса отображений с конечным искажением длины.

1. Введение. В последнее десятилетие в работах многих ведущих специалистов по теории отображений интенсивно изучаются разные классы отображений с конечным искажением, см., напр., [1]–[4], [6]–[26], [28]–[30], [33]–[34], [36]–[38], [42], [44]–[45]. Отображения с конечным искажением длины были введены В.И.Рязановым и исследовались им совместно с О.Мартио, У.Сребро и Э.Якубовым, см. работу [28].

Приведём некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Для отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п.в.), пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x , $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x , т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$$

– **матричная норма** $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что **внешняя дилатация** отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}, \quad (1)$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n}, \quad (2)$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Максимальная дилатация определяется как

$$K(x, f) = \max \{K_O(x, f), K_I(x, f)\}.$$

Определим также специальные дилатации $S_I(x, f)$ и $P_0(x, f)$ следующим образом:

$$S_I(x, f) = [K_I(x, f)]^{\frac{1}{n-1}} \cdot |J(x, f)|, \quad (3)$$

$$P_0(x, f) = [K_0(x, f)]^{\frac{1}{n-1}}. \quad (4)$$

Заметим, что $S_I(x, f) \leq \|f'(x)\|^n$, что является непосредственным следствием соотношения $K_I(x, f) \leq (K_0(x, f))^{n-1}$, см., напр., § 2 Главы 1 в [39]. Таким образом, если $f \in W_{loc}^{1,n}$, то $S_I(x, f) \in L_{loc}^1$.

Пусть задана выпуклая возрастающая функция $\psi : [1, \infty] \rightarrow [0, \infty]$. В дальнейшем будет использоваться следующее обобщение дилатации S_I

$$S_\psi(x, f) = \psi \left([K_I(x, f)]^{\frac{1}{n-1}} \right) \cdot |J(x, f)|. \quad (5)$$

Отображение $f : X \rightarrow Y$ между пространствами с мерой (X, Σ, μ) и (X', Σ', μ') обладает **(N)–свойством**, если $\mu'(f(S)) = 0$ как только $\mu(S) = 0$. Аналогично, f имеет **(N)⁻¹–свойство**, если $\mu(S) = 0$ как только $\mu'(f(S)) = 0$.

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Положим

$$L(x, \varphi) = \limsup_{y \rightarrow x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|},$$

$$l(x, \varphi) = \liminf_{y \rightarrow x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}.$$

Непрерывное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2$, называется отображением с **конечным метрическим искажением**, пишут $f \in FMD$, если f обладает (N) –свойством Лузина и для п.в. $x \in D$

$$0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty.$$

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \rightarrow \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0, t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0, t]}$ кривой γ , если $t > t_0$, и $-l(\gamma|_{[t, t_0]})$, если $t < t_0, t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g} : \Delta_\gamma \rightarrow \Delta_{\tilde{\gamma}}$ такая, что

$$L_{\gamma, g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t) \quad \forall t \in \Delta.$$

Будем говорить, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает (L) –свойством, если выполнены следующие условия:

(L₁) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N –свойством;

(L₂) для п.в. кривых $\tilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\tilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N^{-1} –свойством.

Говорят, что некоторое свойство выполнено для **почти всех кривых** области D , если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D , кроме, быть может, некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Здесь кривая $\gamma \in D$ называется **поднятием** кривой $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ при отображении $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Говорят, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2$, является **отображением с конечным искажением длины**, пишут $f \in FLD$, см. [28], если $f \in FMD$ и обладает (L) –свойством.

Мы пишем $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в D в степени n . Отметим, что гомеоморфизмы класса Соболева $W_{loc}^{1,n}$ в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, почти всюду дифференцируемы и обладают (N) -свойством Лузина, см. [40], [41]. Кроме того, если $K_0(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$, то $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$, см. [6], а потому f обладает (N^{-1}) -свойством, которое эквивалентно условию, что $J(x, f) \neq 0$ п.в., см. [35].

Развитию теории отображений с конечным искажением предшествовало развитие теории отображений с ограниченным искажением, введённых Ю.Г. Решетняком, см. [39]. Напомним, что непрерывное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **отображением с ограниченным искажением**, если выполнены следующие условия:

- 1) $f \in W_{loc}^{1,n}$;
- 2) якобиан отображения $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду;
- 3) $\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)| \dots x \in D$, $K \in [1, \infty)$.

Отображения с ограниченным искажением в зарубежной литературе часто называют также **квазирегулярными**, см., напр., [27]. Заметим, что каждое непостоянное квазирегулярное отображение является отображением с конечным искажением длины, см. Теорему 4.7 в [28].

Интерес к отображениям с конечным искажением длины обусловлен также тесной связью между этим классом и отображениями с конечным искажением. Непрерывное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **отображением с конечным искажением**, если $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot |J(x, f)| \dots x \in D \tag{6}$$

при некоторой конечной почти всюду функции $K(x) : D \rightarrow [1, \infty]$, см. [4], [6], [15], [16].

Согласно Следствию 4.16 из [28], каждый гомеоморфизм конечного искажения с $K_I \in L_{loc}^1$ является отображением с конечным искажением длины.

Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **абсолютно непрерывным на линиях**, пишем $f \in ACL$, если в любом n -мерном параллелепипеде P с рёбрами параллельными осям координат и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Пусть $f \in ACL$. Будем писать $f \in ACL^n$, если все частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = \overline{1, n}$, функции f локально интегрируемы в степени n в D .

Известно, что $W_{loc}^{1,n} = ACL^n$, см. Теорему 2.7.2 в [31].

Согласно Теореме 4.6 в [28], произвольный гомеоморфизм $f \in ACL^n$ с $f^{-1} \in ACL^n$ является отображением с конечным искажением длины.

Основными результатами данной работы являются теоремы о поточечной полунепрерывности "специальных" дилатаций S_I , а также теоремы о полунепрерывности этих дилатаций в среднем для некоторого класса отображений конечного искажения длины.

Стоит отметить, что для плоских ACL – гомеоморфизмов теоремы о полунепрерывности дилатаций доказаны Рязановым В.И., а для пространственных квазирегулярных отображений, Гутлянским В.Я., Рязановым В.И., Мартио О. и Вуориненом М. в [5]. Затем аналогичные теоремы были доказаны автором для отображений конечного искажения длины, см. [44].

Для внутренних дилатаций K_I , для классов отображений конечного искажения, соответствующие теоремы были доказаны в работах [4] и [2], где, однако, полунепрерывность исследовалась при других условиях. В указанной работе авторы предполагали слабую сходимость аппроксимирующей последовательности f_j в $W_{loc}^{1,n}$.

Целью данной статьи является установить аналогичные теоремы для ”специальных” дилатаций S_I и их обобщений.

2. Некоторые леммы и предварительные замечания. Следующая лемма получается непосредственно из Леммы 2 в работе [44] линейной заменой независимой переменной.

ЛЕММА 1. Пусть $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $j = 1, 2, \dots$ – последовательность гомеоморфизмов конечного искажения длины в D , сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда в каждой точке дифференцируемости отображения f выполнено следующее неравенство:

$$P_0(x_0, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n \cdot h^n} \int_{C(x_0, ah)} P_0(y, f_j) dy, \quad (7)$$

где $C(x_0, ah)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, обозначает n -мерный параллелепипед с центром в точке x_0 и рёбрами, имеющими длины $a_1 h, \dots, a_n h$, ориентированными вдоль главных векторов квадратичной формы $(f'(x_0)z, f'(x_0)z)$. Здесь a_i – произвольные положительные числа.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях Леммы 1, для любой выпуклой возрастающей функции $\psi : [1, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ имеет место соотношение:

$$\psi(P_0(x_0, f)) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n \cdot h^n} \int_{C(x_0, ah)} \psi(P_0(y, f_j)) dy \quad (8)$$

и, в частности,

$$K_0(x_0, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n \cdot h^n} \int_{C(x_0, ah)} K_0(y, f_j) dy. \quad (9)$$

ЛЕММА 2. Пусть A – измеримое множество в \mathbb{R}^n и пусть $u : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ – измеримая дифференцируемая почти всюду функция, обладающая (N) -свойством Лузина. Тогда для всякой неотрицательной измеримой функции $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\int_A g(u(x)) |J(x, u)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(u, A, y) dy, \quad (10)$$

где $N(u, A, y)$ – число элементов множества $\{x \in A : u(x) = y\}$.

Действительно, пусть S – множество тех точек множества A , где функция u дифференцируема. Тогда, согласно Теореме 6.4 из [32], будем иметь

$$\int_A g(u(x)) |J(x, u)| dx = \int_S g(u(x)) |J(x, u)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(u, S, y) dx. \quad (11)$$

Для завершения доказательства соотношения (10) достаточно заметить, что $N(u, S, y) = N(u, A, y)$ для п.в. $y \in \mathbb{R}^n$. Действительно, $N(u, A, y) = N(u, S, y) + N(u, A \setminus S, y)$ и $mes(A \setminus S) = 0$ по (N) – свойству. Следовательно, $N(u, A \setminus S, y) = 0$ для п.в. $y \in \mathbb{R}^n$ и получаем требуемое.

Прежде чем переходить к основным результатам, сформулируем важное вспомогательное утверждение.

Напомним, что точка x_0 дифференцируемости отображения f называется **регулярной**, если $J(x_0, f) \neq 0$.

ЛЕММА 3. Пусть D – область в \mathbb{R}^n $n \geq 2$, и пусть $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots$ – последовательность гомеоморфизмов конечного искажения длины, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому гомеоморфизму f . Тогда в каждой регулярной точке x_0 отображения f имеет место соотношение:

$$S_I(x_0, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x_0, h)} S_I(y, f_j) dy, \quad (12)$$

где $C(x_0, h)$ обозначает n -мерный куб с центром в точке x_0 и рёбрами с длиной h , ориентированными вдоль главных векторов квадратичной формы $(f'(x_0)z, f'(x_0)z)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. В силу теоремы 2 в [45], $f_j^{-1} \rightarrow f^{-1}$ при $j \rightarrow \infty$ локально равномерно в $f(D)$. Кроме того, в силу определения (L) – свойства, а также в силу следствия 3.15 в [28], f_j^{-1} являются отображениями с конечным искажением длины. Следовательно, для отображений f_j^{-1} мы можем применить Лемму 1. Выберем в Лемме 1 $a = (a_1, \dots, a_n) = (1/\tilde{\lambda}_1, \dots, 1/\tilde{\lambda}_n)$, $\tilde{\lambda}_1 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n$, где $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ – главные числа линейного отображения $(f^{-1})'(0)$. В силу того, что, по условию, $J(0, f) \neq 0$, все $\tilde{\lambda}_i$ положительны и, кроме того,

$$(f^{-1})'(0) = (f'(0))^{-1}, \quad 1/\tilde{\lambda}_1 = \lambda_n, \dots, 1/\tilde{\lambda}_n = \lambda_1,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ – главные числа отображения $f'(0)$, причём

$$1/\tilde{\lambda}_1 \cdots 1/\tilde{\lambda}_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n = J(0, f).$$

Применяя Лемму 1 для выбранных a_1, \dots, a_n , получим следующее неравенство:

$$P_0(0, f^{-1}) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n \cdot |J(0, f)|} \int_{C(h\lambda)} P_0(y, f_j^{-1}) dy, \quad (13)$$

где $C(h\lambda)$ обозначает прямоугольный параллелепипед с центром в точке $x_0 = 0$ и длинами рёбер, равными $h\lambda_1, \dots, h\lambda_n$, ориентированными вдоль главных осей квадратичной формы $(f'(0)z, f'(0)z)$. Далее, имеем

$$\|(f^{-1})'(0)\|^n = \|(f'(0))^{-1}\|^n = \frac{1}{\lambda_1^n} = \frac{1}{l(f'(0))^n},$$

откуда, учитывая, что $J(0, f) \neq 0$, получаем соотношение

$$P_0(0, f^{-1}) = (K_I(0, f))^{\frac{1}{n-1}}. \quad (14)$$

Преобразуем правую часть неравенства (13). Поскольку f_j конечного искажения длины, то они дифференцируемы почти всюду в D и $J(x, f_j) \neq 0$ п.в., см., напр., предложение 3.7 в [28]. Аналогично (14), для п.в. $x \in D$ получаем равенство

$$P_0(f_j(x), f_j^{-1}) = (K_I(x, f_j))^{\frac{1}{n-1}}.$$

Следовательно, по Лемме [2] будем иметь цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_{C(h\lambda)} P_0(y, f_j^{-1}) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} P_0(y, f_j^{-1}) N(f_j(y), f_j^{-1}(C(h\lambda)), y) dy = \\ &= \int_{f_j^{-1}(C(h\lambda))} P_0(f_j(t), f_j^{-1}) \cdot |J(t, f_j)| dt = \int_{f_j^{-1}(C(h\lambda))} (K_I(t, f_j))^{\frac{1}{n-1}} \cdot |J(t, f_j)| dt . \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (13) можно переписать в виде:

$$S_I(0, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{f_j^{-1}(C(h\lambda))} S_I(y, f_j) dy. \quad (15)$$

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ множества $f_j^{-1}(C(h\lambda))$ содержатся в прямоугольном параллелепипеде

$$\prod_{i=1}^n \left(-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) h, \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) h \right),$$

рёбра которого параллельны главным векторам e_1, \dots, e_n линейного отображения $f'(0)$. Поэтому из (15) получаем, что

$$S_I(0, f) \leq (1 + \varepsilon)^n \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(h)} S_I(y, f_j) dy. \quad (16)$$

В виду произвола $\varepsilon > 0$, соотношение (12) следует непосредственно из (16). \square

Рассуждая также, как и при доказательстве Леммы 3, на основании Следствия 1, приходим к заключению.

ЛЕММА 4. В условиях Леммы 3, для любой выпуклой возрастающей функции $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$S_\psi(x_0, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x_0, h)} S_\psi(y, f_j) dy, \quad (17)$$

и, в частности, при $\psi = t^{n-1}$,

$$K_I(x_0, f) |J(x_0, f)| \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x_0, h)} K_I(y, f_j) |J(y, f_j)| dy. \quad (18)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях Леммы 3, для любых возрастающих выпуклых функций $\phi, \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ имеет место соотношение

$$\phi(S_\psi(x_0, f)) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x_0, h)} \phi(S_\psi(y, f_j)) dy. \quad (19)$$

В частности, если $\psi = t^{n-1}$, будем иметь

$$\phi(K_I(x_0, f) |J(x_0, f)|) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x_0, h)} \phi(K_I(y, f_j) |J(y, f_j)|) dy. \quad (20)$$

3. Основные результаты. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f_m : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – последовательность гомеоморфизмов класса FLD , сходящаяся локально равномерно в D к FLD гомеоморфизму f . Если

$$S_I(x, f_m) \leq S(x) \in L^1_{loc}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

то

$$S_I(x, f) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} S_I(x, f_j) \quad \text{п.в.} \quad (22)$$

Доказательство. Применяя Лемму 3, теорему о почленном интегрировании, см. [43], стр. 50, получаем неравенство

$$S_I(x, f) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x, h)} \limsup_{j \rightarrow \infty} S_I(y, f_j) dy, \quad (23)$$

а применяя теорему о дифференцировании неопределённого интеграла Лебега, см. [43], с.180, по (21), имеем для п.в. $x \in D$ равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{C(x, h)} \limsup_{j \rightarrow \infty} S_I(y, f_j) dy = \limsup_{j \rightarrow \infty} S_I(x, f_j). \quad (24)$$

Объединяя (23) и (24), получаем (22). \square

Используя Лемму 4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f_m : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – последовательность гомеоморфизмов класса FLD , сходящаяся локально равномерно в D к FLD гомеоморфизму f . Если

$$S_\psi(x, f_m) \leq S(x) \in L^1_{loc}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (25)$$

то

$$S_\psi(x, f) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} S_\psi(x, f_j) \quad \text{п.в.}, \quad (26)$$

и, в частности, если

$$K_I(x, f_m) |J(x, f_m)| \leq S(x) \in L^1_{loc}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (27)$$

то

$$K_I(x, f) |J(x, f)| \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} K_I(x, f_j) |J(x, f_j)| \quad \text{п.в.} \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots$ – последовательность гомеоморфизмов класса FLD в D , сходящаяся локально равномерно к

гомеоморфизму f с конечным искажением длины. Пусть $\Phi : [1, +\infty] \rightarrow [0, \infty]$ – произвольная выпуклая возрастающая функция и пусть при п.в. $x \in D$

$$S_I(x, f_j) \leq K(x), \quad (29)$$

где

$$\Phi(K(x)) \in L_{loc}^1. \quad (30)$$

Тогда для любого измеримого множества $E \subset D$ с $mes E < \infty$ имеет место соотношение:

$$\int_E \Phi(S_I(x, f)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E \Phi(S_I(x, f_j)) dx. \quad (31)$$

Доказательство. На основании Следствия 2 из (29) получаем, что $\Phi(S_I(x, f)) \leq \Phi(K(x))$ п.в. и из (30), что $\Phi(S_I(x, f)) \in L_{loc}^1(D)$. Следовательно, по теореме о дифференцируемости неопределённого интеграла, при п.в. $x \in D$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C(x,h)} \Phi(S_I(y, f)) dy = \Phi(S_I(x, f)). \quad (32)$$

Обозначим через E_0 множество тех $x \in D$, где либо f не дифференцируема, либо не имеет место соотношение (32). Заметим, что $mes E_0 = 0$.

Согласно Следствию 2,

$$\Phi(S_I(x, f)) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h^n} \int_{C(x,h)} \Phi(S_I(y, f_j)) dy, \quad \forall x \in D \setminus E_0.$$

Отсюда имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x, \varepsilon) : h < \delta$

$$\Phi(S_I(x, f)) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{C(x,h)} \Phi(S_I(y, f_j)) dy + \varepsilon h^n, \quad (33)$$

и, учитывая (32),

$$\int_{C(x,h)} \Phi(S_I(y, f)) dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{C(x,h)} \Phi(S_I(y, f_j)) dy + \varepsilon h^n \quad (34)$$

для $h < \delta = \delta(x, \varepsilon)$. Пусть $\Omega \subset D$ – открытое множество. Система кубов $C(x, h) : x \in \Omega \setminus E_0$, образует покрытие Витали множества $\Omega \setminus E_0$, так что по теореме Витали о покрытии существует последовательность кубов $C_m = C(x_m, h_m) \subseteq \Omega$:

$$mes \left(\Omega \setminus \bigcup C_m \right) = 0.$$

Таким образом, по (34), получаем, что

$$\int_{\Omega} \Phi(S_I(y, f)) dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Phi(S_I(y, f_j)) dy + \varepsilon mes \Omega, \quad (35)$$

и т.к. $\varepsilon > 0$ произвольно, то (31) доказано для произвольного открытого множества $\Omega \subset D$ с $mes \Omega < \infty$.

Пусть E – произвольное измеримое множество из D с $mes E < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое $\Omega = \Omega_\varepsilon \supseteq E$ с $mes(\Omega_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$, см. III (6.6) в [43]. Из неравенства (31) для Ω имеем, что

$$\begin{aligned} & \int_E \Phi(S_I(y, f)) dy \leq \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(S_I(y, f)) dy \leq \\ & \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(S_I(y, f_j)) dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E \Phi(S_I(y, f_j)) dy + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus E} \Phi(K(y)) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, по условию (30) приходим к (31). \square

Рассуждая аналогично доказательству Теоремы 2, используя Следствие 2, приходим к заключению.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots$ – последовательность гомеоморфизмов класса FLD в D , сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму f с конечным искажением длины. Пусть $\Phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, \infty]$ – произвольная выпуклая возрастающая функция и пусть при п.в. $x \in D$

$$S_\psi(x, f_j) \leq K(x), \tag{36}$$

где

$$\Phi(K(x)) \in L^1_{loc}. \tag{37}$$

Тогда для любого измеримого множества $E \subset D$ с $mes E < \infty$ имеет место соотношение:

$$\int_E \Phi(S_\psi(x, f)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E \Phi(S_\psi(x, f_j)) dx. \tag{38}$$

1. Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G. Mappings of BMO-bounded distortion, Math. Ann. 317 (2000), 703-726.
2. Baisheng Y. On the weak limit of mappings with finite distortion, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (128), 3335-3340.
3. Faraco D., Koskela P, and Zhong X. Mappings of finite distortion: the degree of regularity, Adv. Math. 190(2005), no.2, 300-318.
4. Gehring F.W. and Iwaniec T. The limit of mappings with finite distortion, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), 253-264.
5. Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M. On convergence theorems for space quiregular mappings, Forum Math., 10 (1998), 353-375.
6. Heinonen J. and Koskela P. Sobolev mappings with integrable dilatations, Arch. Rat. Mech. Anal. 125 (1993), 81-97.
7. Hencl S. and Koskela P. Mappings with finite distortion: discreteness and openness for quasi-light mappings, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22 (2005), no. 3, 331-342.
8. Herron D.A. and Koskela P. Mappings with finite distortion: gauge dimension of generalized quasicircles, Illinois J. Math. 47 (2003), no. 4, 1243-1259.
9. Hencl S. and Maly J. Mappings with finite distortion: Hausdorff measure of zero sets, Math. Ann. 324 (2002), no.3, 451-464.

10. *Holopainen I. and Pankka P.* Mappings of finite distortion: global homeomorphism theorem, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 29 (2004), no.1, 59-80.
11. *Игнатъев А. и Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений, *Укр. матем. вестник*, 2(2005), №3, 403-424.
12. *Ignat'ev A. and Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory, *Ukrainian Math. Bull.* 3(2006), no.2, 199-211.
13. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: compactness, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 27, no.2 (2002), 391-417.
14. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity, *Invent. Math.* 144, no.3 (2001), 507-531.
15. *Iwaniec T. and Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
16. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118 (1993), 181-188.
17. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 160 (2001), 135-151.
18. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N, *Michigan Math. J.* 49 (2001), 169-181.
19. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J., Onninen J., Zhong X.* Mappings of finite distortion: sharp Orlich-conditions, *Rev. Mat. Iberoamericana* 19 (2003), no.3, 857-872.
20. *Koskela P. and Maly J.* Mappings of finite distortion: the zero set of the Jacobian, *J. Eur. Math. Soc.* 5 (2003), no.2, 95-105.
21. *Koskela P. and Onninen J.* Mappings of finite distortion: the sharp modulus inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), no.5, 1905-1920 (electronic).
22. *Kovtonyuk D. and Ryazanov V.* On mappings with finite length distortion, *Proc. Inst. Appl. Math. Mech. NASU*, 9 (2004), 102-111.
23. *Kovtonyuk D. and Ryazanov V.* On lower Q – homeomorphisms, *Proc. Inst. Appl. Math. Mech. NASU*, 11 (2005), 69-83.
24. *Ковтонюк Д.А. и Рязанов В.И.* О гомеоморфном продолжении на границу нижних Q – гомеоморфизмов, *Труды ИПММ НАН Украины*, 12 (2006), 100-105.
25. *Manfredi J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32, no.2 (1995), 235-240.
26. *Manfredi J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem, *Indiana Univ. Math. J.* 47, no.3 (1998), 1131-1145.
27. *Martio O., Rickman S. and Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*, 448 (1969), 1-40.
28. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion, *J. D. Anal. Math.*, 93 (2004), 215-236.
29. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q – homeomorphisms, *Cont. Math.*, 364 (2004), 193-203.
30. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On Q -homeomorphisms, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 30(2005), no.1, P.49-69.
31. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.
32. *Müller S.* Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1 , *J. Reine Angew. Math.* 412(1990), 20-34.
33. *Onninen J.* Mappings of finite distortion: future directions and problems, *The p -harmonic equation and recent advances in analysis*, 199-207, *Contemp. Math.*, 370, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
34. *Onninen J.* Mappings of finite distortion: minors of the differential matrix, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 21 (2004), no.4, 335-348.
35. *Пономарёв С.П.* (N^{-1}) -свойство отображений и (N) -условие Лузина, *Матем. заметки* 58(1995), 411-418.
36. *Rajala K.* Mappings of finite distortion: the Rickman-Picard theorem for mappings of finite lower order, *J. Anal. Math.* 94 (2004), 235-248.
37. *Rajala K.* Mappings of finite distortion: removability of Cantor sets, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 29 (2004), no.2, 269-281.

38. *Rajala K.*, Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no.11, 3251-3258 (electronic).
39. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285с.
40. *Решетняк Ю.Г.* Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду, Матем. сб. т.75, 3 (1968),323-334.
41. *Решетняк Ю.Г.* Геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 886-919.
42. *Рязанов В.И. и Севостьянов Е.А.* Нормальные семейства пространственных отображений, Сиб. электр. матем. известия, 3(2006), 216-231.
43. *Сакс С.* Теория интеграла, М., ИЛ (1949) – 494с.
44. *Севостьянов Е.А.* О теоремах сходимости отображений с конечным искажением длины, Труды ИПММ НАН Украины, 10 (2005), 173-183.
45. *Севостьянов Е.А.* Теория сходимости и квазилинейные уравнения Бельтрами, Труды ИПММ НАН Украины, 12 (2006), 128-139.