Математические заметки

том 76 выпуск 1 июль 2004

УДК 517.925.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев

Рассмотрена периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Предполагается, что система допускает нулевое решение. Показано,что если нулевое решение системы устойчиво или асимптотически устойчиво, то оно соответственно равномерно устойчиво или равномерно асимптотически устойчиво. С помощью метода функций Ляпунова получены критерии равномерной асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Библиография: 18 названий.

При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущения удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят "мгновенный" характер [1]. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К первым работам в этом направлении следует отнести [2]–[9]. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием явилась монография [1], в которой изложены основы этой теории. В последние годы заметно увеличилось число математических работ по исследованиям различных аспектов теории импульсных систем [10]–[13], что вызвано запросами новейшей техники. Настоящая статья посвящена изучению устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Она является продолжением и развитием работ [1], [14].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,\dots, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \qquad i = 1,2,\dots, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $I_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$. Предположим, что $f(t,x)$ непрерывна в области $\mathbb{R}_+ \times B_H$, где $\mathbb{R}_+ = [0;\infty)$; $B_H = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant H\}$, $f(t,0) \equiv 0$, $I_i(0) = 0$. Кроме того, будем полагать функции $f(t,x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяющими условию Липшица с константой $L > 0$:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x-y\| \qquad \text{для любых} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in B_H, \quad y \in B_H,$$

$$\|I_i(x) - I_i(y)\| \leqslant L\|x-y\| \qquad \text{для любых} \quad x \in B_H, \quad y \in B_H, \quad i = 1,2,\dots .$$

Решение системы (1), (2), начинающееся в момент t_0 в точке x_0, и значение этого решения в момент t будем обозначать $x(t,t_0,x_0)$. Это решение будем предполагать непрерывно-дифференцируемым по t на любом из множеств

$$G_k = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_{k-1} < t < \tau_k,\ x \in B_H\}, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

и непрерывным слева в точках разрыва: $x(\tau_k,t_0,x_0) = x(\tau_k - 0,t_0,x_0)$.

Сформулируем понятия устойчивости и притяжения нулевого решения системы (1), (2) (см. [15], [16]).

Определение 1. Решение

$$x = 0 \tag{3}$$

системы (1), (2) называется *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) > 0$ такое, что для любых $x_0 \in B_\delta$, $t \geqslant t_0$ выполняется $x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon$; *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\delta$, $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \varepsilon$.

Определение 2. Решение (3) системы (1), (2) называется *притягивающим*, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ имеется $\lambda = \lambda(t_0) > 0$ такое, что для всяких $\varepsilon > 0$, $x_0 \in B_\lambda$ найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon,t_0,x_0) > 0$, что $x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + \sigma$ (при этом область B_λ называется *областью притяжения решения* (3) в момент t_0); *эквипритягивающим*, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ найдется $\lambda = \lambda(t_0) > 0$ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon,t_0) > 0$ такое, что для любых $x_0 \in B_\lambda$, $t \geqslant t_0 + \sigma$ выполняется неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \varepsilon$; *равномерно притягивающим*, если имеется такое $\lambda > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$, $t \geqslant t_0 + \sigma$ справедливо $x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon$.

Иными словами, решение (3) системы (1), (2) называется притягивающим, если для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,t_0,x_0)\| = 0; \tag{4}$$

эквипритягивающим, если соотношение (4) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\lambda$; равномерно притягивающим, если предельное соотношение (4) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\lambda$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Определение 3. Нулевое решение системы (1), (2) назовем *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и притягивающее; *эквиасимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и эквипритягивающее; *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.

Всюду в дальнейшем будем предполагать систему (1), (2) периодической с периодом ω. Это означает, что существует $q \in \mathbb{N}$ такое, что

$$I_{i+q}(x) \equiv I_i(x), \quad \tau_{i+q} = \tau_i + \omega, \quad i = 1,2,\ldots, \qquad f(t+\omega,x) \equiv f(t,x). \tag{5}$$

Здесь $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел.

Теорема 1. *Если решение* (3) *системы* (1), (2) *устойчиво, то оно равномерно устойчиво.*

Доказательство. В силу условий (5) имеем

$$x(t+\omega, t_0+\omega, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0), \tag{6}$$

поэтому достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \in [0, \omega)$, $x_0 \in B_\delta$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. По предположению, при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что если $x_\omega = x(\omega)$ удовлетворяет условию $x_\omega \in B_{\delta_1}$, то $x(t, \omega, x_\omega) \in B_\varepsilon$ при $t \geqslant \omega$. Воспользовавшись оценкой (2.25) монографии [1], можно утверждать, что если выбрать $\delta = (1+L)^{-q}e^{-L\omega}\delta_1$, то при выполнении в любой момент $t_0 \in [0, \omega)$ условия $x_0 = x(t_0) \in B_\delta$ $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если решение* (3) *системы* (1), (2) *асимптотически устойчиво, то оно равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Так как по предположению решение (3) системы (1), (2) асимптотически устойчиво, то в области

$$t_0 \in \mathbb{R}_+, \qquad x_0 \in B_\lambda, \tag{7}$$

где λ – достаточно малое положительное число, выполняется предельное соотношение (4). Покажем теперь, что это предельное соотношение выполняется равномерно по t_0, x_0 из области (7), т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $t \geqslant t_0 + \sigma$ будет выполняться неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon$. В силу периодичности системы считаем, что t_0 меняется в отрезке $[0; \omega]$. Прежде всего определим число $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ из условия

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad x_0 \in B_\eta, \quad t > t_0, \tag{8}$$

что всегда возможно в силу равномерной устойчивости решения (3). Предположим от противного, что такого числа $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ не существует. Тогда как бы ни было велико натуральное число m, всегда найдется такое $t_m > m\omega$ и такие начальные значения $t_{0m} \in [0; \omega]$, $x_{0m} \in B_\lambda$, что

$$\|x(t_m, t_{0m}, x_{0m})\| > \varepsilon. \tag{9}$$

Так как последовательность точек $\{t_{0m} \times x_{0m}\}$ лежит в компактном множестве, из этой последовательности может быть выделена подпоследовательность, сходящаяся к точке $t_* \times x_* \in [0; \omega] \times B_\lambda$. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{t_{0m}\}$ сходится к точке $t_* \in [0; \omega]$, а последовательность $\{x_{0m}\}$ сходится к точке $x_* \in B_\lambda$. Следовательно, для значений $t_0 = t_*$, $x_0 = x_*$ выполняется предельное соотношение (4), из которого вытекает, что существует достаточно большое натуральное число $k = k(\varepsilon)$ такое, что будет иметь место неравенство

$$\|x(t_* + k\omega, t_*, x_*)\| < \frac{1}{2}\eta(\varepsilon). \tag{10}$$

Но тогда в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных найдутся сколь угодно большие значения m, для которых будет выполняться неравенство

$$\|x^{(k)}\| < \eta(\varepsilon), \tag{11}$$

где $x^{(k)} = x(t_{0m} + k\omega, t_{0m}, x_{0m})$. Из (11), (8) следует, что при всех $t > t_{0m}$ выполняется $\|x(t, t_{0m}, x^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$, откуда на основании (6) и свойства единственности решения имеем

$$\varepsilon \geqslant \|x(t, t_{0m}, x^{(k)})\| \equiv \|x(t + k\omega, t_{0m} + k\omega, x^{(k)})\| \equiv \|x(t + k\omega, t_{0m}, x_{0m})\|.$$

Полученное неравенство противоречит предположению (9), так как существуют t_m такие, что $t_m > k\omega$. Полученное противоречие доказывает справедливость того, что предельное соотношение (4) выполняется равномерно по t_0, x_0. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь возможность применения идеи Барбашина–Красовского [17] исследования устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с помощью второго метода Ляпунова.

Введем в рассмотрение функцию $V : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$. Будем предполагать, что функция V является непрерывно-дифференцируемой на любом из множеств G_k и $V(t, 0) \equiv 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, полагаем $V(\tau_k, x) = V(\tau_k - 0, x)$. Для $(t, x) \in G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ определим производную от функции V в силу (1):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x).$$

Аналогично работе [18] введем следующее определение.

Определение 4. Функция $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, называется *финально ненулевой*, если для любого $M > 0$ существует такое $t > M$, что $g(t) \neq 0$. Числовая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *финально ненулевой*, если для любого натурального числа M существует $k > M$ такое, что $u_k \neq 0$.

Определение 5. Функция $r\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называется *функцией класса Хана* [15], если она непрерывна, монотонно возрастает и $r(0) = 0$.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1), (2) *существует периодическая по* t *с периодом* ω *функция* $V(t, x)$, *непрерывно-дифференцируемая в области* G, *удовлетворяющая условиям*

$$a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|), \qquad a \in \mathscr{K}, \quad b \in \mathscr{K}, \tag{12}$$

где $\mathscr{K}$ – *класс функций Хана, и условиям*

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0 \qquad \text{при} \quad (t, x) \in G,$$
$$\Delta V_i(x) = V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \leqslant 0.$$

Если вдоль любого финально ненулевого решения уравнений (1), (2) *выполняется хотя бы одно из условий*:

а) dV/dt – *функция финально ненулевая*,

б) *последовательность* $\{\Delta V_i\}$ *финально ненулевая*,

то нулевое решение системы (1), (2) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Свойство устойчивости решения (3) системы (1), (2) доказывается аналогично доказательству теоремы 1 работы [14]. Из теоремы 1 настоящей работы заключаем, что нулевое решение равномерно устойчиво. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\delta$ при $t > t_0$ выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon$. Покажем, что любая траектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ с такими начальными условиями обладает свойством (4).

Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$. Она не возрастает и ограничена снизу, поэтому имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \eta \geqslant 0.$$

Покажем, что $\eta = 0$. Предположим противное: пусть

$$\eta = \lim_{t\to\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) > 0. \tag{13}$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_k\}$, где $x_k = x(t_0 + k\omega, t_0, x_0)$. Учитывая, что $\|x_k\| \leqslant \varepsilon < H$, можно сделать вывод, что существует подпоследовательность, сходящаяся к точке $x_* \in B_\varepsilon$. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке $x_* \neq 0$. Так как функция V непрерывна по x и периодична по t, должно выполняться равенство $V(t_0, x_*) = \eta$. Рассмотрим полутраекторию $x(t, t_0, x_*)$ при $t \geqslant t_0$ и функцию $V_*(t) = V(t, x(t, t_0, x_*))$ вдоль этой траектории. По условию теоремы $V_*(t)$ не возрастает, причем либо существует точка непрерывности траектории t_1 такая, что $dV(t_1, x(t_1, t_0, x_*))/dt < 0$, либо точка разрыва траектории τ_s такая, что

$$V(\tau_s + 0, x(\tau_s + 0, t_0, x_*)) - V(\tau_s, x(\tau_s, t_0, x_*)) < 0.$$

Это означает, что существует момент времени $t_* > t_0$ такой, что

$$V(t_*, x(t_*, t_0, x_*)) = \eta_1 < \eta.$$

Так как последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x_*, вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать неравенство

$$\|x(t_*, t_0, x_*) - x(t_*, t_0, x_k)\| < \gamma$$

при всех $k > N(\gamma)$, каково бы ни было наперед заданное число $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} V(t_*, x(t_*, t_0, x_k)) = \eta_1. \tag{14}$$

Учитывая периодичность системы (1), (2), можно записать

$$x(t_*, t_0, x_k) = x(t_*, t_0, x(t_0 + k\omega, t_0, x_0)) = x(t_* + k\omega, t_0, x_0). \tag{15}$$

Действительно, траектории I и II системы (1), (2), начинающиеся соответственно в моменты времени t_0 и $t_0 + k\omega$ в точке x_k, за время $\Delta t = t_* - t_0$ перейдут соответственно в точки $x(t_*, t_0, x_k)$ и $x(t_* + k\omega, t_0, x_0)$, что и доказывает соотношение (15). Из периодичности по t функции $V(t, x)$ имеем равенство $V(t_*, x) = V(t_* + k\omega, x)$, поэтому условие (14) на основании (15) можно записать таким образом:

$$\lim_{k\to\infty} V(t_* + k\omega, x(t_* + k\omega, t_0, x_0)) = \eta_1. \tag{16}$$

Но соотношение (16) противоречит неравенству $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant \eta$, так как $\eta_1 < \eta$. Противоречие доказывает, что предположение (13) было неверным, т.е. $\eta = 0$. Из условия (12) получаем предельное соотношение (4), доказывающее асимптотическую устойчивость нулевого решения. Используя теорему 2, можно сделать вывод о том, что нулевое решение системы (1), (2) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 4. *Пусть для системы* (1), (2) *существует периодическая по t с периодом ω функция $V(t, x)$, непрерывно-дифференцируемая в области G, удовлетворяющая условиям*

$$|V(t, x)| \leqslant b(\|x\|), \qquad b \in \mathscr{K}, \tag{17}$$

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \qquad \text{при} \quad (t, x) \in G, \tag{18}$$

$$\Delta V_i(x) = V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \geqslant 0. \tag{19}$$

Пусть, кроме того, вдоль любого финально ненулевого решения уравнений (1), (2) *выполняется хотя бы одно из условий*:

а) *dV/dt – функция финально ненулевая*;

б) *последовательность $\{\Delta V_i\}$ финально ненулевая.*

Тогда если в любой сколь угодно малой окрестности начала координат при любом $t > 0$ найдется точка x такая, что $V(t, x) > 0$, то решение (3) *системы* (1), (2) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < H$ – некоторое положительное число. Выберем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и сколь угодно малое $\delta > 0$. Покажем, что существуют $x_0 \in B_\delta$ и $t > t_0$ такие, что $\|x(t, t_0, x_0)\| > \varepsilon$. Для этого выберем $x_0 \in B_\delta$ таким, что $V(t_0, x_0) = V_0 > 0$. Предположим противное:

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon \tag{20}$$

при всех $t > t_0$. Из условия (17) получаем

$$|V(t, x)| < V_0 \qquad \text{при} \quad \|x\| < b^{-1}(V_0) = \eta, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Учитывая предположения (18)–(20), заключаем, что полутраектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$\eta \leqslant \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_j\}$, где $x_j = x(t_0 + j\omega, t_0, x_0)$, $j = 1, 2, \ldots$. Учитывая, что эта последовательность расположена в компактном множестве, из нее может быть выделена сходящаяся к точке x_* подпоследовательность, причем x_* удовлетворяет условиям $\eta \leqslant \|x_*\| \leqslant \varepsilon$. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{x_j\}$ сходится к точке x_*.

Функция $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху числом $b(\varepsilon)$; следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = v_0 = V(t_0, x_*),$$

причем

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqslant v_0. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь полутраекторию $x(t, t_0, x_*)$ при $t > t_0$. В силу предположений теоремы на этой полутраектории имеется либо точка t_1 такая, что

$$\frac{dV(t_1, x(t_1, t_0, x_*))}{dt} > 0,$$

либо точка τ_s такая, что

$$\Delta V_s = V(\tau_s + 0, x(\tau_s, t_0, x_*) + I_s(x(\tau_s, t_0, x_*)) - V(\tau_s, x(\tau_s, t_0, x_*)) > 0.$$

Это означает, что существует момент времени $t_* > t_0$ такой, что

$$V(t_*, x(t_*, t_0, x_*)) = v_1 > v_0.$$

Так как последовательность $\{x_j\}$ сходится к точке x_*, вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных получаем неравенство

$$\|x(t_*, t_0, x_*) - x(t_*, t_0, x_j)\| < \gamma$$

при всех $j > N(\gamma)$, каково бы ни было наперед заданное число $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} V(t_*, x(t_*, t_0, x_j)) = v_1. \tag{22}$$

Учитывая периодичность системы (1), (2), можно записать

$$x(t_*, t_0, x_j) = x(t_* + j\omega, t_0, x_0). \tag{23}$$

Из периодичности по t функции $V(t, x)$ имеем равенство $V(t_*, x) = V(t_* + j\omega, x)$, поэтому условие (22) с использованием (23) можно записать таким образом:

$$\lim_{j\to\infty} V(t_* + j\omega, x(t_* + j\omega, t_0, x_0)) = v_1. \tag{24}$$

Но соотношение (24) противоречит неравенству (21), так как $v_1 > v_0$. Противоречие доказывает, что предположение (20) было неверным, т.е. нулевое решение системы (1), (2) неустойчиво, что и следовало доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.

[2] Мильман В. Д., Мышкис А. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. матем. ж. 1960. Т. 1. №2. С. 233–237.

[3] Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Матем. сб. 1967. Т. 74. №2. С. 202–208.

[4] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

[5] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №11. С. 1981–1992.

[6] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1995–2001.

[7] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1034–1045.

[8] Перестюк Н. А., Шовкопляс В. Н. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. ж. 1979. Т. 31. № 5. С. 517–524.

[9] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. ж. 1982. Т. 34. № 1. С. 66–73.

[10] Bainov D. D., Simeonov P. S. Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications. New York–Chichester–Brisbane–Toronto: Halsted Press, 1989.

[11] Martynyuk A. A., Stavronlakis I. P. Stability analysis of linear impulsive differential systems under structural perturbation // Укр. матем. ж. 1999. Т. 51. № 6. С. 784–795.

[12] Hu S., Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. № 1. P. 75–85.

[13] Lakshmikantham V., Xinzhi Liu. On quasistability for impulsive differential systems // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. № 7. P. 819–828.

[14] Гургула С. И., Перестюк Н. А. Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Матем. физика. 1982. № 31. С. 9–14.

[15] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

[16] Перестюк Н. А., Черникова О. С. Устойчивость решений импульсных систем // Укр. матем. ж. 1997. Т. 49. № 1. С. 98–111.

[17] Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.

[18] Колмановский В. Б., Косарева Н. П. О свойствах решений некоторых разностных систем с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1554–1559.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-mail: `ignat@iamm.ac.donetsk.ua`

Поступило
21.05.2002
Исправленный вариант
25.06.2003