Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 4, 583 – 604

Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление

Евгений А. Севостьянов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье изучаются Q-отображения, допускающие наличие точек ветвления, — пространственные отображения, удовлетворяющие модульным неравенствам. Доказано, что семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений, опускающих множество положительной ёмкости, нормально при условии, что Q имеет конечное среднее колебание в каждой точке, либо имеет лишь логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Modulus, capacity, normal families, mappings, Q-homeomorphisms.

1. Введение

Выдающийся математик современности, крупнейший специалист в теории отображений Георгий Дмитриевич Суворов считал, что "сегодня идеалом (и целью!) в теории функций можно считать достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)". Данная работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в работах многих специалистов по теории отображений, таких как К. Астала, Э. Вилламора, С. Водопьянова, Ф. Геринга, В. Гутлянского, Т. Иванца, П. Коскела, В. Миклюкова, Дж. Манфреди, Г. Мартина, О. Мартио, В. Рязанова, У. Сребро, П. Тамразова, Э. Якубова и других.

Статья поступила в редакцию 31.03.2007

Как известно, в основу определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma), \tag{1.1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке ёмкостей соотношение (1.1) означает, что отображение f искажает ёмкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз. Предположим теперь, что в основе определения рассматриваемого класса отображений, вместо соотношения (1.1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x),$$

где $dm(x)$ — n-мерная мера Лебега, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, а $Q : D \to [1, \infty]$ — фиксированная вещественнозначная функция. В случае когда $Q(x) \leq K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1.1). В общем случае последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$,

$$M(f\Gamma) \leq M_{Q(x)}(\Gamma),$$

см. [22]. Можно также предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а, скажем, только некоторые. Например, семейства кривых, которые соединяют концентрические сферы с центром в каждой фиксированной точке заданной области.

И в том, и в другом случае речь идёт о классах пространственных отображений, которые, в случае неограниченной функции $Q(x)$, не совпадают с классом квазиконформных отображений. Их изучению в контексте получения оценок искажения расстояния посвящена эта работа.

Приведём основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Везде далее запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания. Мы также предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию, т.е., топологический индекс $\mu\,(y,\,f,\,G)>0$ для произвольной области $G\Subset D$ и произвольного $y\in f(G)\setminus f\partial G$. В дальнейшем $B(x_0,\,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $B(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<r\}$, $\mathbb{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$, $dm(x)$ — n-мерная мера Лебега.

Приведённые выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f:D\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$, где область $D\subset\mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$.

В 2001 г. О. Мартио предложил к рассмотрению следующее определение, см. также [1]. Пусть $Q:D\rightarrow[1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f:D\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma)\le\int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\,dm(x) \tag{1.2}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho\in adm\,\Gamma$.

Напомним, что борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,|dx|\ge 1$$

для всех путей $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in adm\,\Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in adm\,\Gamma}\int\limits_D\rho^n(x)\,dm(x).$$

Определение Q-гомеоморфизма можно рассматривать как обобщение геометрического определения квазиконформного отображения Ю. Вяйсяля на весовые модули, см. [22,23]. Отметим, что оценки типа (1.2) в случае $Q(x)\equiv 1$ характеризуют конформные отображения, а при $Q(x)\leqq$ — квазиконформные, см., напр., [23, 8.1, 13.1, 34.3]. В случае, когда непостоянное отображение f не является гомеоморфизмом, оценки вида (1.2) при ограниченной функции Q фактически являются частью определения квазирегулярных отображений (отображений с ограниченным искажением).

Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\ge 2$, $E,F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E,\ \gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,\,b)$. Положим $\Gamma(E,F)=\Gamma(E,F,\overline{\mathbb{R}^n})$, если $D=\overline{\mathbb{R}^n}$. Напомним, что *кольцом* в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется область R, дополнение к которой в $\overline{\mathbb{R}^n}$ состоит из двух связных компонент, скажем, C_1 и C_2. Коротко это записывают так: $R = R(C_1,\, C_2)$. Пусть $R = R(C_1,\, C_2)$ — кольцо в $\overline{\mathbb{R}^n}$, тогда *ёмкость* $\operatorname{cap} R$ кольца R может быть определена соотношением

$$\operatorname{cap} R = M\left(\Gamma\left(C_1,\, C_2\right)\right),$$

см., напр., теорему 1 главы 2 в [2] и теорему 11.3 в [23].

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [3], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия Q-отображения, впервые было введено В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости, см., напр., [17, 18]. Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \le \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ge 1.$$

Если (1.3) выполнено для каждой точки $x_0 \in D$, то f называется кольцевым Q-гомеоморфизмом.

Следует отметить, что в случае ограниченной функции $Q(x)$ определения кольцевого Q-гомеоморфизма и Q-гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. знаменитую работу Геринга [3]. В общем случае каждый Q-гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот: в работе [17] приведены примеры кольцевых Q-гомеоморфизмов в фиксированной точке x_0, таких что $Q(x) \in (0,\, 1)$ на некотором множестве, для которого x_0 является точкой плотности. Мы не будем здесь останавливаться на указанных связях более детально.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Назовём непрерывное сохраняющее ориентацию отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *кольцевым Q-отображением в области D*, если соотношение (1.3) выполнено для любого $x_0 \in D$. Из определения ясно, что класс Q-отображений (непрерывных сохраняющих ориентацию отображений, удовлетворяющих модульному условию (1.2)) включается в класс кольцевых Q-отображений. Основным объектом данной работы с этого момента являются именно кольцевые Q-отображения, поскольку все полученные результаты, в силу сказанного, переносятся на Q-отображения, как тривиальные следствия.

Пусть $(X,\, d)$ и $(X\,',d')$ — метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X\,'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \to X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X\,'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X.

Ниже мы формулируем одну из версий теоремы Арцела–Асколи, см. [23, 20.4].

Предложение 1.1. *Если $(X,\, d)$ — сепарабельное метрическое пространство, а $(X\,',\, d')$ — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

Вопрос об оценках искажения и нормальности семейств для квазиконформных отображений и их обобщений исследовался многими авторами, такими как Л. Альфорс, П. Белинский, С. Водопьянов, М. Вуоринен, Ю. Вяйсяля, Ф. Геринг, В. Гутлянский, С. Крушкаль, М. Лаврентьев, О. Лехто, В. Миклюков, А. Мори, И. Овчинников, И. Песин, Ю. Решетняк, С. Рикман, В. Рязанов, Г. Суворов, Б. Шабат и др. Необходимо также отметить вклад в развитие модульной техники, теории квазиконформных отображений, Q-гомеоморфизмов и их аналогов в работах С. Водопьянова, В. Гутлянского, А. Игнатьева, О. Мартио, В. Миклюкова, В. Рязанова, У. Сребро, П. Тамразова и Э. Якубова, см., напр., [1, 4, 6, 11–13, 17, 18, 22, 24].

В последнее время теория Q-гомеоморфизмов, в основном, развивалась, когда функция Q принадлежала известному классу BMO (ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу), см. [11, 12]. В контексте изучения нормальных семейств, автором были сделаны некоторые продвижения, см. [19, 20]. В этих работах некоторые теоремы, аналогичные изложенным в этой статье, получены для гомеоморфизмов. Основные результаты этой работы сформулированы в секциях 4, 5 и 6. Отметим, что техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается.

2. Предварительные сведения

В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и ёмкости конденсатора, см., напр., [9, § 5] или раздел 10 главы 2 в [16]. *Конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Конденсатор E называют *кольцевым*, если $A \setminus C$ является кольцом.

Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор. *Ёмкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x), \qquad (2.1)$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$.

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, пишем $f \in ACL$, если в любом n-мерном параллелепипеде P с рёбрами параллельными осям координат и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат.

Замечание 2.1. Согласно лемме 5.5 в [9],

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0^{\infty}(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x), \qquad (2.2)$$

где $W_0^{\infty}(E) = W_0(E) \cap C_0^{\infty}(A)$, а $C_0^{\infty}(A)$ — множество вещественнозначных, бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в A.

Более того, условие $u(x) \geq 1$ для каждого $x \in C$ может быть заменено условием $u(x) = 1$ для каждого $x \in C$ или даже условием $u(x) = 1$ в некоторой окрестности C, см. замечание 2.2 в [10].

Замечание 2.2. Пусть $E=(A,\,C)$ — кольцевой конденсатор. Тогда

$$\operatorname{cap} E=\operatorname{cap}\,(A\setminus C)\,,$$

где в левой части $\operatorname{cap} E$ означает ёмкость конденсатора, определённая соотношением (2.1), а в правой части $\operatorname{cap}\,(A\setminus C)$ — ёмкость кольца в смысле Геринга, см. лемму 5.6 в [9], см. также [2].

Замечание 2.3. Понятие ёмкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. раздел 2.1 в [9].

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x,y)=|\pi(x)-\pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+{|x|}^2}},\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+{|x|}^2}\sqrt{1+{|y|}^2}},\quad x\ne\infty\ne y.$$

Хордальным диаметром множества $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E)=\sup\limits_{x,y\in E}h(x,y).$$

Кольцом Тейхмюллера называют кольцо

$$R_T(t)=R([-1,0],[t,\infty]),\qquad t>1.$$

Сформулируем теперь очень важный результат, принадлежащий Герингу, см. [2] или [25, 7.37]. Пусть $R(E,F)$ — произвольное кольцо. Тогда

$$\operatorname{cap}\,(R(E,F))\ge\operatorname{cap}\Big(R_T\Big(\frac{1}{h\,(E)\;h\,(F)}\Big)\Big).\tag{2.3}$$

Как известно, $\operatorname{cap}\,(R_T(t))=\frac{\omega_{n-1}}{\{\log\Phi(t)\}^{n-1}}$, где ω_{n-1} — площадь единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, а функция Φ удовлетворяет условиям: $t+1\le\Phi(t)\le\lambda_n^2\cdot(t+1)<2\lambda_n^2\cdot t$, $t>1$, $\lambda_n\in[4,2e^{n-1})$, $\lambda_2=4$, $\lambda_n^{1/n}\to e$ при $n\to\infty$, см., напр., [2, с. 225–226], (7.19) и (7.22) в [25]. Следовательно, из соотношения (2.3) получаем следующую оценку ёмкости.

Лемма 2.1. *Для любых континуумов E и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место соотношение:*

$$\operatorname{cap}\,(R(E,F))\ge\frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}}.$$

Лемма 2.2. *Предположим, что $E = (A, C)$ — конденсатор, такой что $A \subset B(r)$ и что множество C связно. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\operatorname{cap} E \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \frac{2\lambda_n^2}{h(C)h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)\right)}\right\}^{n-1}},$$

где ω_{n-1} — площадь сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Обозначим через U неограниченную компоненту множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Пусть C_1 — компакт $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$. Ясно, что $C \subset C_1$ и $C_1 \setminus C$ — открытое множество, состоящее из всех компонент связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$ за исключением U. Кроме того, известно, что C_1 связно, см., напр., теорему 5, гл. 5, § 46, раздел III в [8, с. 149]. Из последнего факта следует, что конденсатор $E_1 = (B(r), C_1)$ является кольцевым конденсатором, а связными компонентами дополнения соответствующего кольца являются множества C_1 и $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)$.

Покажем, что $\operatorname{cap} E \geq \operatorname{cap} E_1$. Предположим, что функция $u \in W_0^{\infty}(E)$ такая, что $u(x) = 1$ в некоторой окрестности C. Определим функцию $v(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом: $v(x) = 1$ при $x \in C_1$ и $v(x) = u(x)$ в противном случае.

Покажем, что $v \in W_0^{\infty}(E_1)$. Заметим, что

$$\overline{\mathbb{R}^n} = U \cup (C_1 \setminus C) \cup C.$$

Точки $x_0 \in U \cap B(r)$ не могут быть особыми для функции v и её производных, ибо U по построению является открытым множеством, в точках которого v совпадает с u. Аналогично, множество $C_1 \setminus C$ является открытым, в виду чего $v(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in C_1 \setminus C$. Поэтому точки $x_0 \in C_1 \setminus C$ также не могут быть особенностями функции $v(x)$ и её производных. Наконец, точки $x_0 \in C$ не могут быть особыми для v и её производных, поскольку в некоторой окрестности C мы будем иметь $u(x) = v(x) = 1$.

Таким образом, $v \in W_0^{\infty}(E_1)$, откуда, учитывая соотношение (2.2), будем иметь

$$\operatorname{cap} E_1 \leq \int\limits_{B(r)} |\nabla v|^n \, dm(x) \leq \int\limits_{A} |\nabla u|^n \, dm(x).$$

Принимая во внимание замечание 2.1, будем иметь $\operatorname{cap} E_1 \leq \operatorname{cap} E$. Остальная часть доказательства непосредственно вытекает из того, что E_1 — кольцевой конденсатор, замечания 2.2 и леммы 2.1. $\square$

3. Основная лемма об оценке искажения

Следующее понятие можно найти в [16, с. 32], см. секцию 3 главы II.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение. Пусть $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и пусть $x \in \ f^{-1}\left(\beta(a)\right).$ Кривая $\alpha : [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если

(1) $\alpha(a) = x$;

(2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$;

(3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c')}$.

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in \ f^{-1}\left(\beta(a)\right),$ тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x, см. следствие 3.3 главы 2 в [16]. Нам понадобится следующее утверждение, см. предложение 10.2 главы II в [16].

Лемма 3.1. *Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда* $\operatorname{cap} E = M\left(\Gamma_E\right).$

Замечание 3.1. Отметим, что заключение леммы 3.1 остаётся справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. замечание 10.8 главы II в [16].

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ при $\Gamma_1 > \Gamma_2$, см., напр., теорему 6.4 в [23].

Лемма 3.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\, dm(x) \leq F(\varepsilon), \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad (3.1)$$

для некоторого $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где $\psi_{\varepsilon}(t)$, $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)\,,$ — семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций, таких что

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда

$$\operatorname{cap} fE \le F(\varepsilon)/I^n(\varepsilon) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{3.2}$$

где $E = (A, C)$, $A = B(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$.

Доказательство. Поскольку f — открытое и непрерывное отображение, то $E' = f\,E$ также является конденсатором. Если $\operatorname{cap} fE = 0$, доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap} fE \ne 0$. Обозначим через Γ^*_{fE} семейство всех спрямляемых кривых Γ_{fE}. Ясно, что кривые из Γ^*_{fE} не проходят через ∞. Отметим, что $M(\Gamma^*_{fE}) = M(\Gamma_{fE}) = \operatorname{cap} fE$, см. лемму 3.1 и замечание 3.1. Заметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma^*_{fE}$ имеет максимальное f-поднятие, лежащее в A с началом в C, см. следствие 3.3 главы 2 в [16]. Пусть Γ^* — семейство максимальных f-поднятий кривых Γ^*_{fE}. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства Γ^*_{fE}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \to A$ лежит в некотором компакте K внутри A. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в A, см., напр., теорему 2 §45 в [8, с. 12]. Заметим, что $c \ne b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в fA, что противоречит условию $\beta \in \Gamma^*_{fE}$. Рассмотрим множество

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\}, \qquad t_k \in [a, c),\ \lim_{k\to\infty} t_k = c.$$

Проще говоря, G — предельное множество $\alpha(t)$ при $t \to c - 0$. Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f(\alpha(x_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $x_k \in [a, c)$, $x_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f(\alpha(x_k)) = \beta(x_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в A. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$, см. [8, с. 8–9],

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \ne \varnothing$$

в виду монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным по I (9.12) в [26]. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha : [a, c) \to A$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a, c] \to K \subset A$ и $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 главы II в [16] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальности поднятия α.

Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{fE}^* > f\Gamma^*$, и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{fE}^*\right) \le M\left(f\Gamma^*\right). \tag{3.3}$$

Рассмотрим

$$S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon\},$$

$$S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon_0\},$$

где ε_0 — из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то семейство кривых $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)$ минорирует семейство Γ^* и, следовательно, $f\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)$ минорирует $f\Gamma^*$ и, потому

$$M\left(f\Gamma^*\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right). \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.3) и (3.4) следует, что

$$M\left(\Gamma_{fE}^*\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right) \tag{3.5}$$

и, таким образом,

$$\mathrm{cap}\, fE \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right). \tag{3.6}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций

$$\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon), \qquad t \in (\varepsilon, \varepsilon_0).$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1.$$

Тогда по определению кольцевого Q-отображения

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right) \le \frac{1}{I^n(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\, dm(x). \tag{3.7}$$

Наконец, из соотношений (3.1), (3.6) и (3.7) следует соотношение (3.2). Лемма 3.2 доказана. □

Аналоги следующей леммы доказывались в работах [19, 20] для гомеоморфизмов.

Лемма 3.3. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение, такое что $D' = f(D) \subset B(r)$ с $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)) \geq \delta > 0$. Предположим, что для $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\, dm(x) \leq K \cdot I^p(\varepsilon), \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (3.8)$$

где $p \leq n$ и $\psi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, — семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций, таких что

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)\, dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|)\}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, где

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}, \qquad (3.9)$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где $A = B(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. По лемме 3.2 будем иметь

$$\operatorname{cap} fE \leq K \cdot I^{p-n}(\varepsilon)\,. \qquad (3.10)$$

Поскольку $fA \subset B(r)$, в силу леммы 2.2, примененной к конденсатору fE, будем иметь

$$\operatorname{cap} fE \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \frac{2\lambda_n^2}{h(fC)h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)\right)}\right\}^{n-1}}, \qquad (3.11)$$

где ω_{n-1} — площадь сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$. Поскольку по условию $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)\right) \geq \delta$, из (3.10) и (3.11) будем иметь

$$h\,(fC) \leq \frac{2\,\lambda_n^2}{\delta} \exp\left\{ - \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}} (I(\varepsilon))^{\frac{p-n}{n-1}} \right\}.$$

Принимая обозначения $\alpha_n = 2\lambda_n^2$, $\beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, $\gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}$, получим

$$h\,(fC) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon)\}. \qquad (3.12)$$

Пусть теперь $x \in D$ такое, что $|x - x_0| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда $x \in \overline{B\,(x_0,\,\varepsilon)}$ и $f(x) \in f(\overline{B\,(x_0,\,\varepsilon)}) = fC$ и из (3.12) имеем оценку

$$h\,(f(x),\,f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|)\right\} \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0). \quad (3.13)$$

В силу произвольности $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0)$, (3.13) имеет место во всём шаре $B(x_0,\,\varepsilon_0)$. □

Следствие 3.1. *В условиях леммы* 3.3*, при* $p = 1$

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\exp\{-\beta_n I(|x-x_0|)\}.$$

4. Оценки искажения расстояния при кольцевых Q-отображениях

Теорема 4.1. *Пусть* $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \ge 2$, *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение. Если*

$$q_{x_0}(r) \le \left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1} \quad (4.1)$$

для $r < \varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < r_0 = \operatorname{dist}(x_0,\,\partial D)$*, где* $q_{x_0}(r)$ *— среднее интегральное значение* Q *над сферой* $|x - x_0| = r$*, то*

$$h(f(x), f(x_0)) \le\, \alpha_n\,\frac{\log\frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}} \quad (4.2)$$

для всех $x \in B(x_0,\,\varepsilon(x_0))$.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\,\int\limits_{|x-x_0|=r}\frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)dr$$

$$\le \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log\frac{1}{r}} = \omega_{n-1}\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon).$$

Таким образом, соотношение (4.2) следует из леммы 3.3 при $p = 1$, $K = \omega_{n-1}$ и $\psi_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$, $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0)$. □

Следствие 4.1. *В частности, если*

$$Q(x) \le \left[\log\frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}, \qquad \forall\,x \in B(x_0,\,\varepsilon(x_0)), \quad (4.3)$$

то соотношение (4.2) *имеет место в шаре* $B(x_0,\,\varepsilon(x_0))$.

Замечание 4.1. Если вместо соотношений (4.1) и, соответственно, (4.3) выполнены соотношения $q_{x_0}(r) \le c \cdot [\log \frac{1}{r}]^{n-1}$ и, соответственно, $Q(x) \le c \cdot \left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}$, то

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{1/(n-1)}}.$$

Говорят, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ с $\varphi \in L^1_{loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B| \, dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берётся по всем шарам $B \subset D$ и $\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x) \, dm(x)$ — среднее значение функции φ на шаре B, см., напр., [7].

С целью упрощения записи, мы обозначаем в дальнейшем

$$\fint\limits_A f(x) \, dm(x) := \frac{1}{|A|} \int\limits_A f(x) \, dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)$, см., напр., [7]. Следуя работе [6], введём следующие определения.

Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty, \tag{4.4}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (4.4) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Также будем говорить, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$. В частности, если в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x)| \, dm(x) < \infty,$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0. Очевидно, $BMO \subset FMO$. Заметим, что $FMO \ne BMO_{loc}$, см. [18]. Версию следующей леммы см., напр., в [6], см. [19, 20].

Лемма 4.1. *Пусть $\varphi : D \to \mathbb{R}, n \geq 2,$ — неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = O\Big(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

при $\varepsilon \to 0$ и для некоторого $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D)$.

Теорема 4.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$, то*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \cdot \left\{\frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^{\beta_0}$$

для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ при некотором $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где α_n зависит только от n и $\beta_0 > 0$ зависит только от функции Q.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{e^{-1}, \operatorname{dist}(x_0, \partial D)\}$. Предположим, что функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$. Тогда на основании леммы 4.1, для функции $\psi(t) = \frac{1}{t\, \log \frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) \\
&\qquad = \int\limits_{\varepsilon<|y|<\varepsilon_0} Q(x_0+y) \cdot \psi^n(|y|)\, dm(y) \\
&\qquad = \int\limits_{\varepsilon<|y|<\varepsilon_0} \frac{Q(x_0+y)}{\left(|y|\, \log \frac{1}{|y|}\right)^n}\, dm(y) = O\Big(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\Big). \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $Q_1(y) := Q(y+x_0)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0.

Заметим, что

$$I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log\Big(c \log\frac{1}{\varepsilon}\Big), \qquad (4.6)$$

где $c = \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}$. На основании соотношений (4.5) и (4.6) теперь получаем, что для выбранной функции ψ в точности выполнено соотношение (3.8) с $p = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 3.3. $\square$

Замечание 4.2. Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение и пусть дополнительно $Q(x) \geq 1$ п.в. в D. Тогда для каждой точки $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, и для любого $\beta \geq 1/(n-1)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} \right\}, \tag{4.7}$$

где α_n задаётся соотношением (3.9) и $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$.

Действительно, обозначая $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0)$ и

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t q_{x_0}^{\beta}(t)}, & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & \mathrm{t} \in [\varepsilon_0, \infty), \end{cases}$$

получаем при $Q(x) \geq 1$ п.в. оценку

$$\int\limits_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)},$$

и заключение теоремы следует из леммы 3.3 с $p = 1$ и $K = \omega_{n-1}$.

Конечно, среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ на некоторых сферах $|x - x_0| = r$ может быть бесконечно. Однако, скажем, по теореме Фубини, см., напр., [21], $q_{x_0}(r)$ измерима по параметру r, поскольку $Q(x)$ измерима по x. Более того, $\int_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} < \infty$ для $x \neq x_0$, т.к. $q_{x_0}(r) \geq 1$. Интеграл в (4.7) может быть равен 0, если $q_{x_0}(r) = \infty$ п.в., но в таком случае неравенство (4.7) очевидно, ибо $\alpha_n \geq 32$ и $\delta \leq 1$, а $h(f(x), f(x_0))$ не превосходит 1.

Обозначим через $\mathfrak{F}_Q(D)$ класс всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$.

Теорема 4.3. *Класс $\mathfrak{F}_Q(D)$ образует нормальное семейство отображений в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(D)$;

2) *для каждого $x_0 \in D$, $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \quad ⨍_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty$;*

3) *каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q(x)$;*

4) *$Q(x)\geq 1$ п.в. и условие расходимости интеграла $\int_0^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\beta}(r)}=\infty$ при некотором $\beta\geq 1/(n-1)$, например, при $\beta=1$ в каждой точке $x_0\in D$, где $\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, а $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$;*

5) *$Q(x)$ имеет особенности логарифмического типа порядка не выше, чем $n-1$, в каждой точке $x\in D$.*

5. Равностепенная непрерывность и нормальность семейств в случае неограниченной области

Здесь нам понадобится понятие множества нулевой ёмкости, см., напр., [10] или [16].

Говорят, что компактное множество E в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, имеет *нулевую ёмкость*, пишем $\operatorname{cap} E=0$, если существует ограниченное открытое множество A с $E\subset A$ такое, что $\operatorname{cap}(A,E)=0$. Ю. Решетняк доказал, см. [14], что в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого A, содержащего E, выполнено $\operatorname{cap}(A,E)=0$. В противном случае, если существует открытое множество A с $E\subset A$ такое, что ёмкость $\operatorname{cap}(A,E)>0$, полагаем $\operatorname{cap} E>0$. Легко видеть, что если E является одноточечным множеством, $E=\{a\}$, то оно имеет ёмкость нуль.

Аналогично тому, как последнее определение введено в $\mathbb{R}^n$, можно определить понятие множества ёмкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см., напр., раздел 2.12 в [10]. Следующая лемма, см. лемму 3.11 в [10] или лемму 2.6 главы III в [16], играет одну из ключевых ролей во всех дальнейших рассуждениях.

Лемма 5.1. *Предположим, что E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$, такое что $\operatorname{cap} E>0$. Тогда для каждого $a>0$ существует положительное число $\delta>0$ такое, что*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E,\, C\right)\geq\delta \tag{5.1}$$

где C — континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ с $h(C)\geq a$.

Лемма 5.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и пусть $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной ёмкости. Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\,dm(x)=o\left(I^n\left(\varepsilon\right)\right),\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0) \tag{5.2}$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *где* $\psi_\varepsilon(t)$ *— семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на* $(0, \infty)$ *функций, таких что*

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)\, dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_Q$ *равностепенно непрерывно в точке* x_0.

Доказательство. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдётся число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие леммы 5.1. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$, $A = B\,(x_0, r_0)\,,\ C = \overline{B(x_0,\, \varepsilon)}$, а $r_0 = \operatorname{dist}\,(x_0,\, \partial D)\,.$ Используя оценку (3.2) из леммы 3.2, из условия (5.2) получаем

$$\operatorname{cap} f\mathcal{E} \le \alpha(\varepsilon) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0),$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(a)$ найдётся $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$\operatorname{cap} f\mathcal{E} \le \delta \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,. \tag{5.3}$$

Используя соотношение (5.3), будем иметь

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E,\, f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) \le \operatorname{cap}\left(f\,(B(x_0,\, r_0))\, f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) \le \delta \tag{5.4}$$

при $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,.$

Тогда из леммы 5.1 следует, что $h\Big(f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\Big) < a$. Окончательно, для любого $a > 0$ существует $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что $h\Big(f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\Big) < a$ как только $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,.$ Лемма доказана. □

Сформулируем теперь две важнейших теоремы этой работы, справедливость которых теперь легко следует из леммы 5.2.

Теорема 5.1. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, *и пусть* $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *— компактное множество положительной ёмкости. Пусть* $\mathfrak{F}_Q$ *— семейство открытых дискретных кольцевых* Q*-отображений* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ *с* $Q \in FMO(D)$. *Тогда* $\mathfrak{F}_Q$ *образует нормальное семейство отображений.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in D$ и положим $\psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$. Тогда из леммы 4.1 следует, что в каждой точке $x_0 \in D$ для функции $Q(x)$ выполнено условие (5.2) из леммы 5.2. Нормальность семейства $\mathfrak{F}_Q$ следует теперь из версии теоремы Арцела–Асколи, сформулированной в предложении 1.1. □

Теорема 5.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной ёмкости. Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$. Предположим, что*

$$q_{x_0}(r) = O\Big(\Big[\log \frac{1}{r}\Big]^{n-1}\Big)$$

при $r \to 0$ для произвольного $x_0 \in D$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.

Доказательство. Выбирая в лемме 5.2 $\psi_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$, получаем справедливость утверждения по предложению 1.1. □

6. Об отображениях с конечным искажением длины

Напомним некоторые определения. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если f непрерывно, $f \in W^{1,n}_{loc}$, якобиан $J(x, f)$ не меняет знак в D и

$$\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)| \qquad \text{п.в.} \tag{6.1}$$

для некоторого числа $K \geq 1$, см. [9, 14, 15]. Если условие (6.1) заменить более общим условием $\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot |J(x, f)|$ п.в. с конечной функцией $K(x)$, то получится одно из определений *отображения с конечным искажением*, см. [5].

Следуя [11], говорим, что непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является отображением с *конечным метрическим искажением*, пишем $f \in FMD$, если f обладает (N)-свойством Лузина и

$$0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty \qquad \text{п.в.},$$

где

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x,\, y \in D} \frac{|f(x) - f(y)|}{|y - x|}, \quad l(x, f) = \liminf_{y \to x,\, y \in D} \frac{|f(x) - f(y)|}{|y - x|}.$$

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ между пространствами с мерой (X, Σ, μ) и (X', Σ', μ') обладает (N)*-свойством*, если $\mu'(f(S)) = 0$ как только $\mu(S) = 0$. Аналогично, f обладает $\left(N^{-1}\right)$*-свойством*, если $\mu(S) = 0$ как только $\mu'(f(S)) = 0$.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием

$l_\gamma(t_0) = 0,\ t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\mid_{[t_0,\,t]}$ кривой γ, если $t > t_0$ и $-l\left(\gamma\mid_{[t,\,t_0]}\right)$, если $t < t_0,\ t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,\,g}\left(l_\gamma\left(t\right)\right) = l_{\widetilde{\gamma}}\left(t\right)\ \forall\, t \in \Delta$. Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает (L)-*свойством*, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает (N)-свойством;

(L_2) для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f\left(D\right)$ каждое *поднятие* γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает $\left(N^{-1}\right)$-свойством.

Здесь кривая $\gamma \in D$ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Следуя [11], говорим, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, является *отображением с конечным искажением длины*, пишем $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает (L)-свойством.

Заметим, что развитая выше теория применима к семействам отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, поскольку отображения класса FLD являются Q-отображениями с $Q(x) = K_I(x,\,f)$, где $K_I(x,\,f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке $x \in D$, см. теорему 6.10 в [11,].

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x,f)$ — якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. Пусть, кроме того, $l\left(f'(x)\right) = \min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество положительной ёмкости. Обозначим через $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений конечного искажения длины $f : D \to \mathbb{R}^n \setminus E$, таких, что $K_I\left(x,\,f\right) \leq Q(x)$ п.в.

Теорема 6.1. *Если $Q \in FMO(D)$, то семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Следствие 6.1. *Семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty, \qquad \forall\, x_0 \in D.$$

Теорема 6.2. *Семейство $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если при $r \to 0$*

$$q_{x_0}(r) = O\Big(\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{n-1}\Big), \qquad \forall\, x_0 \in D,$$

где $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение Q над сферой $|x-x_0| = r$.

Следствие 6.2. *Семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если функция $Q(x)$ имеет в каждой точке $x_0 \in D$ только логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.*

Литература

[1] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.

[2] F. W. Gehring, *Quasiconformal mappings*, Complex Analysis and its Applications, V. 2., International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[3] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[4] В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов, *К теории локального поведения квазиконформных отображений* // Известия РАН. Сер. Мат., **59** (1995), N 3, 31–58.

[5] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford: Clarendon Press, 2001.

[6] А. Игнатьев и В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **2** (2005), N 3, 395–417.

[7] F. John, and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[8] К. Куратовский, *Топология*, т. 2. М.: Мир, 1969, 624 с.

[9] O. Martio, S. Rickman, and J. Vaisala, *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448** (1969), 1–40.

[10] O. Martio, S. Rickman, and J. Vaisala, *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465** (1970), 1–13.

[11] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), N 1, 49–69.

[13] В. М. Миклюков, *Относительное расстояние М.А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях* // Укр. матем. вестник, **1** (2004), N 3, 349–372.

[14] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением* // Сиб. матем. ж., **8** (1967), N 3, 629–658.

[15] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.

[16] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[17] V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equations* // J. d'Anal. Math., **96** (2005), 117–150.

[18] V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *The Beltrami equation and ring homeomorphisms* // Ukrain. Math. Bull., **4** (2007), N 1, 79–115.

[19] V. Ryazanov and Sevost' E. yanov, *To the theory of normal families of space mappings*, Helsinki, 2003, 13 pp.– (Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki; 2003.367).

[20] В. И. Рязанов и Е. А. Севостьянов, *Нормальные семейства пространственных отображений* // Сиб. электр. матем. известия, www.math.semr.nsc.ru, **3** (2006), 216–231.

[21] S. Saks, *Theory of the integral*, New York: Dover Publ. Inc., 1937.

[22] П. М. Тамразов, *Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях* // Укр. матем. ж., **50** (1998), N 10, 1388–1398.

[23] J. Vaisala, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. 229. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[24] С. К. Водопьянов, *Отображения с ограниченным и конечным искажением на группах Карно* // Сиб. матем. ж., **40** (1999), N 4, 768–804.

[25] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math. 1319. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1988.

[26] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1942.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: sevostyanov@skif.net,
e_sevostyanov@rambler.ru,
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua