

УДК 531.38

©2001. И.Н. Гашененко, Е.Ю. Кучер

АНАЛИЗ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Указан топологический тип трехмерных интегральных многообразий, которым принадлежат все известные точные решения уравнений Эйлера–Пуассона. В фазовом пространстве задачи построена двумерная поверхность сечения Пуанкаре и выполнен компьютерный анализ траекторной структуры динамической системы в окрестности исследуемых частных решений.

Введение. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, ω – угловая скорость тела в подвижном базисе, ν – единичный вектор вертикали, \mathbf{r} – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс тела. Известными интегралами (1) являются

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \nu = h, \quad G = A\omega \cdot \nu = g, \quad I = \nu \cdot \nu = 1. \quad (2)$$

Выделим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\omega, \nu)$ трехмерное компактное подмножество

$$\mathcal{Q}_{h,g}^3 = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6(\omega, \nu),$$

которое инвариантно относительно фазового потока динамической системы (1). Принимая во внимание гамильтоновость уравнений (1) на поверхности уровней интегралов G, I , будем называть $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ *изоэнергетической* поверхностью [1,2]. Траектории динамической системы (1) проще изучать не во всем фазовом пространстве, а на регулярных изоэнергетических поверхностях, которые имеют малую размерность и простую топологическую структуру. Векторное соотношение

$$F = (A\omega \times \nu) \cdot \mathbf{r} = 0$$

выполняется на непустом множестве точек любой траектории системы (1), поэтому выберем компактное подмножество

$$\mathcal{P}_{h,g}^2 = \{H = h, G = g, I = 1, F = 0\} \subset \mathbb{R}^6(\omega, \nu)$$

в качестве двумерной вспомогательной поверхности (сечения Пуанкаре), которая позволит нам получить первичную информацию о расположении траекторий на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. Можно показать, что $\mathcal{P}_{h,g}^2$ состоит из множества критических точек гладкого отображения $p|_{\mathcal{Q}^3}$, где $p : (\omega, \nu) \mapsto \omega$ – проекция. Отметим некоторые важные свойства этой поверхности. Замкнутая ориентируемая компонента поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$ разбивает связную компоненту неособого ориентируемого 3-многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ на два полных кренделя одинакового рода. Внутри каждой связной компоненты $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ расположена только одна компонента

$\mathcal{P}_{h,g}^2$. Почти любая фазовая траектория пересекает поверхность сечения $\mathcal{P}_{h,g}^2$. Исключением являются равномерные вращения и несколько известных периодических траекторий, которые целиком принадлежат $\mathcal{P}_{h,g}^2$.

Возможность существования периодических траекторий на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ обсуждалась многими авторами. Например, в работе В.В.Козлова [3] доказана следующая теорема:

Уравнения задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой при фиксированных значениях постоянной площадей g и энергии $h > \max(\frac{1}{2}g^2/(A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$ имеют хотя бы одно периодическое движение. Если $g = 0$, то при всех $h > \max(-\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$ уравнения (1) имеют не менее шести различных периодических траекторий (их проекции на сферу Пуассона – три различные замкнутые несамопересекающиеся кривые).

В некоторых частных случаях эта теорема может быть подтверждена нетривиальными примерами – частными периодическими решениями уравнений (1), для которых известны алгебраические инвариантные соотношения. “Используя, например, один результат В.А.Стеклова можно доказать существование периодических решений на всех совместных некритических уровнях интегралов энергии и момента (а не только при достаточно больших значениях h), если центр масс тела лежит на оси инерции.”[3, с.51]

Заметим, что последнее утверждение нуждается в уточнении: во-первых, полученное В.А.Стекловым в 1899 г. периодическое решение существует только при достаточно больших значениях h и $g = 0$, поэтому ссылка в [3] не верна и, конечно, имеется в виду другой результат, полученный почти одновременно В.А.Стекловым и Д.Н.Бобылевым в 1896 г.; во-вторых, решение Бобылева–Стеклова также существует не при любых допустимых значениях h, g . Далее мы докажем, что при выполнении неравенства $h \leq g^2/(2A_1) - |r_1|$ решения Бобылева–Стеклова не существует.

Если гамильтонова система интегрируема при помощи боттовского интеграла на некоторой фиксированной трехмерной изоэнергетической поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, тогда точные нижние оценки числа устойчивых периодических решений могут быть получены из топологических соображений (см. [1, гл.4,§1]). Кроме того, для интегрируемых случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева–Чаплыгина имеется детальная классификация, основанная на изучении бифуркационных диаграмм и построении топологических инвариантов (молекул) А.Т.Фоменко, которая позволяет указать точное число предельных циклов и изолированных периодических решений на любой поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. Во всех перечисленных случаях $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ имеют не слишком сложную структуру: от двух до восьми периодических траекторий (критических окружностей) могут принадлежать каждой связной компоненте этого 3-многообразия [2].

1. Бифуркации поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2$. Если центр масс тела принадлежит главной оси инерции ($r_2 = r_3 = 0$), тогда критические значения отображения $H \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g)$ образуют бифуркационное множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$, состоящее из четырех плоских кривых:

$$h = \frac{1}{2} \frac{g^2}{A_1} \pm |r_1|, \quad (3^1)$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{A_i}{\sigma^2} + \frac{3}{2} \sigma^2 \sigma_*, \quad g = \frac{A_i}{\sigma} + \sigma^3 \sigma_*, \quad \sigma^2 \leq \frac{|r_1|}{\sigma_*}, \quad (3^2)$$

где $\sigma_* = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_i)}$, $i = 2, 3$. Бифуркации поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ в этом случае полностью исследованы в работе [4]. Область изменения параметров $(\alpha, \beta) = (A_2 A_1^{-1}, A_3 A_1^{-1})$ рас-

положена в первом квадранте и ограничена прямыми

$$\{\beta = \alpha + 1, \alpha \in [0, \infty)\} \cup \{\beta = \alpha - 1, \alpha \in [1, \infty)\} \cup \{\beta = 1 - \alpha, \alpha \in (0, 1)\}.$$

Для любой точки этой области можно построить кривые (3) на $\mathbb{R}^2(h, g)$. Множество

$$\{\alpha = 1, \beta \in (0, 2)\} \cup \{\beta = 1, \alpha \in (0, 2)\} \cup \{\alpha = \frac{3}{4}, \beta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)\} \cup \{\beta = \frac{3}{4}, \alpha \in \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)\} \cup \{\alpha = \beta > \frac{1}{2}\} \cup \{\alpha = \frac{(9-8\beta)}{(5-4\beta)^2}, \beta \in \left(\beta_0, \frac{3}{4}\right)\} \cup \{\beta = \frac{(9-8\alpha)}{(5-4\alpha)^2}, \alpha \in \left(\alpha_0, \frac{3}{4}\right)\},$$

где $\alpha_0 = \beta_0 \approx 0.4647$, делит плоскость $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ на подобласти I-VII с различными типами бифуркационных диаграмм (рис. 1). Полный список неособых интегральных многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ получен С.Б.Каток [4]. Заметим, что в самом общем случае неособые поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ рассматриваемой задачи являются связными или состоят из нескольких (двух или трех [5]) связных компонент, которые бывают (в зависимости от значений h, g) только следующих четырех видов: $\mathbb{R}P^3, S^3, S^1 \times S^2$ и $K^3 = (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$. Представленное в виде связной суммы многообразие K^3 можно также получить из сферы S^3 приклеиванием двух “ручек” [6, с.345].

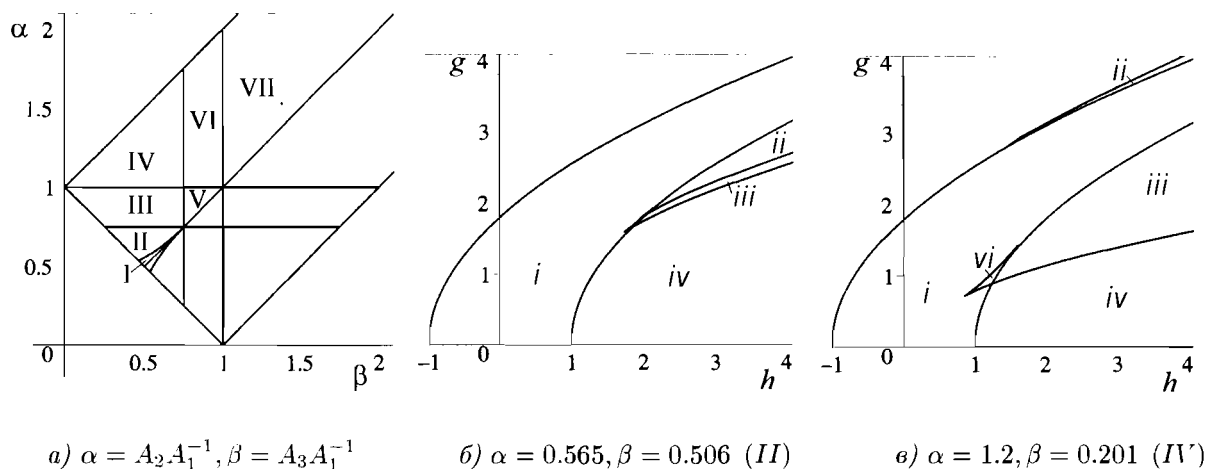


Рис. 1. Примеры бифуркационных диаграмм. Случай $r_2 = r_3 = 0$.

Если центр масс волчка лежит в главной плоскости (например, пусть $r_3 = 0$), тогда бифуркационные кривые имеют следующий вид:

$$h = \frac{A_2 r_1 \sigma^3 + (3A_2 - 2A_1) r_2 \sigma^2 + (3A_1 - 2A_2) r_1 \sigma + A_1 r_2}{2(A_1 - A_2) \sigma (\sigma^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4^1)$$

$$g = \frac{(A_1 + A_2 \sigma^2) (r_1 \sigma + r_2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^{\frac{1}{2}} (A_1 - A_2)^{\frac{1}{2}} (\sigma^2 + 1)^{\frac{3}{4}}},$$

где $\sigma \in (-\infty, -r_2 r_1^{-1}] \cup [-r_2 r_1^{-1}, 0) \cup (0, \infty)$, и

$$h = \frac{1}{2} \frac{A_3}{\sigma^2} + \frac{3}{2} \sigma^2 \sigma_*, \quad g = \frac{A_3}{\sigma} + \sigma^3 \sigma_*, \quad |\sigma| \leq \sigma_0^{-\frac{1}{4}}, \quad (4^2)$$

где

$$\sigma_* = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_0 = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)^2}.$$

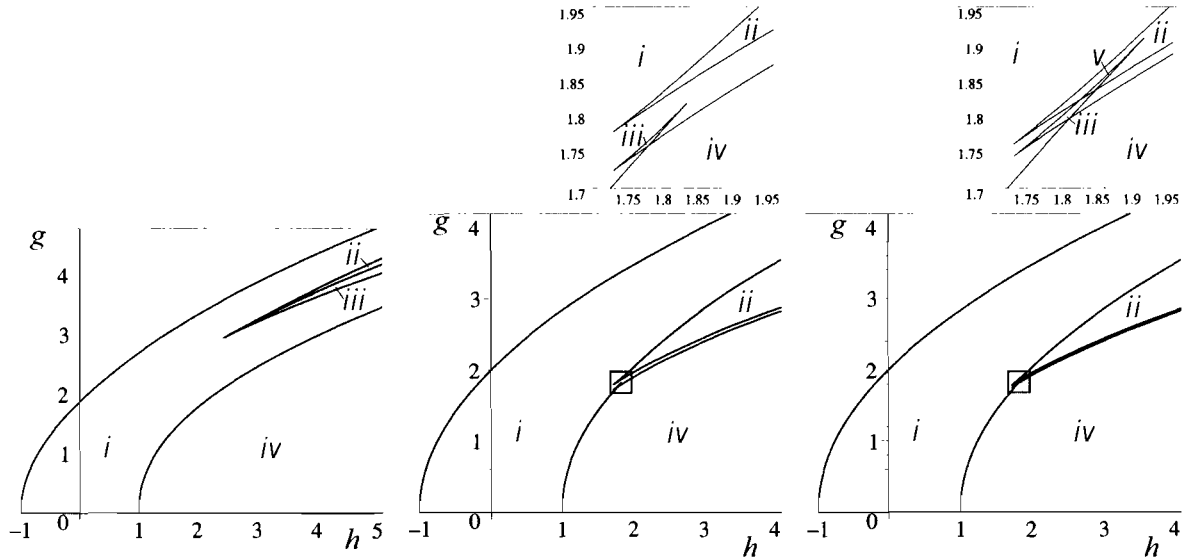
Такая запись бифуркационного множества позволяет дополнить начатое в работе [5] исследование случая $r_3 = 0$. Особые точки кривой (4¹) найдем из условий $\frac{dh}{d\sigma} = \frac{dl}{d\sigma} = 0$. Так как выполняется равенство $l \frac{dl}{d\sigma} = (\sigma^2 + 1)^{-1} (A_1 + A_2 \sigma^2) \frac{dh}{d\sigma}$, получим одно уравнение для параметра σ :

$$\alpha \sigma^5 + (4\alpha - 3)\sigma^3 + (3\alpha - 4)r_* \sigma^2 - r_* = 0, \quad (5)$$

где $r_* = r_2 r_1^{-1}$, $\alpha = A_2 A_1^{-1}$. Число особых точек кривой (4¹) зависит от числа действительных корней этого уравнения. Можно показать, что уравнение (5) с действительными коэффициентами имеет не более трех действительных корней (вычислим число перемен знаков у коэффициентов полинома и применим, например, теорему Декарта). Это свойство позволяет разделить значения параметров (α, r_*) , при которых кривая (4¹) имеет одну либо три особые точки. Приравнявая нулю дискриминант уравнения (5)

$$\alpha(3\alpha - 4)^5 r_*^4 + c(\alpha) r_*^2 - (4\alpha - 3)^5 = 0, \quad (6)$$

где $c(\alpha) = 256(\alpha^6 + 1) - 2700(\alpha^4 + 1)\alpha + 8268(\alpha^2 + 1)\alpha^2 - 11650\alpha^3$, получим уравнение разделяющей кривой на плоскости параметров (α, r_*) . Анализ особых точек приведенного потенциала на сфере Пуассона позволяет описать топологию $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ по стандартной схеме [4,5,2]. На рис. 2 показаны основные типы бифуркационных диаграмм для случая $A_1 > A_3 > A_2$, $r_*^2 > (\beta - \alpha)$. Полный список неособых поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ содержит пять типов 3-многообразий: *i*) S^3 , *ii*) $S^3 \cup S^3$, *iii*) $S^1 \times S^2$, *iv*) $\mathbb{R}P^3$, *v*) $S^3 \cup (S^1 \times S^2)$.



а) $\alpha = 0.7, \beta = 0.85, r_* = 1.2$ б) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5005, r_* = 0.04$ в) $\alpha = 0.5, \beta = 0.50005, r_* = 0.01$

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы. Случай $A_1 > A_3 > A_2$, $r_3 = 0$.

Топология поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$ и ее расположение внутри многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ меняются при изменении параметров тела и констант h, g . Бифуркационное множество и кривые

$$g^2(A^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - 2|\mathbf{r}|^2(h \pm |\mathbf{r}|) = 0, \quad (7)$$

$$8h^3 - 27g^2(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 0 \quad (8)$$

разделяют плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на конечное число связных областей, внутри которых сохраняется топологический тип поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$. С учетом физических ограничений на фазовые переменные следует положить в (8)

$$\frac{3(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{2|A^{-1}\mathbf{r}|} \leq h \leq \frac{3}{2}|\mathbf{r}|.$$

Детальное описание топологии и бифуркаций поверхностей $\mathcal{P}_{h,g}^2$ дано в статье И.Н.Гашененко и П.Рихтера "Enveloping surfaces and admissible velocities of the heavy spinning top" (в печати). Каждая связная компонента неособой поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$ является двумерным компактным многообразием M_m^2 рода $m \geq 0$ (сферой с m "ручками"), а число m в данной задаче не превосходит четырех. Проекции поверхностей $\mathcal{P}_{h,g}^2$ на подвижное пространство угловых скоростей исследованы в работах [7,8], там же предложена схема изучения проекций $\mathcal{P}_{h,g}^2$ на сферу Пуассона.

2. Частные решения. Центр масс принадлежит главной оси инерции. Переходим к краткому описанию всех известных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. Более детальные сведения о точных решениях динамики твердого тела и физических параметрах, при которых эти решения существуют, имеются в монографиях [9–11]. Функциональная зависимость констант h, g от параметров A_i, r_i для некоторых частных решений изучена А.А.Богоявленским и А.И.Докшевичем, на основе этих результатов далее будут указаны типы поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, несущих периодические траектории. Результаты компьютерного моделирования точных решений представлены на рис. 3–6. Вычисления проводились по следующей схеме: строились периодические решения и типичные траектории на неособых поверхностях $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, находились точки пересечения этих траекторий с $\mathcal{P}_{h,g}^2$, поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2 \subset \mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ проектировались на сферу $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$. Почти все точки сферы имеют два прообраза на $\mathcal{P}_{h,g}^2$, поэтому на рисунках показаны две копии S^2 (точнее, их проекции на $\mathbb{R}^2(\nu_1, \nu_2)$). В случае $g = 0$ изображена только одна копия, так как вторая ей идентична. Центр масс тела принадлежит одной из двух ортогональных осей, изображенных на этих рисунках.

Случай Бобылева–Стеклова. Пусть $A_1 = 2A_3$, $A_2 = \gamma A_3$, $\gamma \in (1, 3)$, $r_2 = r_3 = 0$. Д.Н.Бобылев и В.А.Стеклов независимо нашли при указанных ограничениях на распределение масс в твердом теле семейство частных решений уравнений Эйлера–Пуассона. В этом случае инвариантное многообразие задано следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_0, \quad \omega_2 = 0, \quad \nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1 \omega_3^2, \\ \nu_2^2 &= \eta_0 + \eta_1 \omega_3^2 + \eta_2 \omega_3^4, \quad \nu_3 = \xi_0 \omega_3, \end{aligned}$$

где $a_0, \zeta_i, \eta_i, \xi_0$ зависят от γ и двух свободных констант h, g . Зависимость ω_3 от времени выражена эллиптической функцией Якоби, а величины ω_1, ω_2 от времени не зависят.

ТЕОРЕМА. Если константы h, g связаны неравенством $h \leq g^2/(2A_1) - |r_1|$, тогда на многообразии $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ не существует решения Бобылева–Стеклова.

Доказательство. На единичной сфере Пуассона допустимыми являются те и только те точки, в которых приведенный потенциал задачи

$$U_g = \frac{g^2}{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu})$$

удовлетворяет неравенству $U_g \leq h$. Предположим, что условие $h \leq g^2/(2A_1) - |r_1|$ выполняется и $Q_{h,g}^3$ не пусто. Непустые интегральные многообразия существуют, например, при $A_2 > A_1 = 2A_3$, $r_2 = r_3 = 0$ (см. на рис. 1, в область *ii*). Тогда в точках пересечения плоскости $\nu_2 = 0$ со сферой $|\nu| = 1$ должно выполняться неравенство $U_g|_{\nu_2=0} \leq g^2/(2A_1) - |r_1|$, то есть

$$0 \leq \frac{g^2}{2A_1} \frac{(1 - \nu_1^2)}{(1 + \nu_1^2)} \leq |r_1|(\nu_1 - 1) \leq 0.$$

Следовательно, при заданных параметрических ограничениях фазовые траектории могут пересекать гиперплоскость $\nu_2 = 0$ только если $\nu_1 = 1$, но для семейства решений Бобылева–Стеклова получаем противоречие: в моменты времени, когда величина $|\omega_3|$ достигает максимального значения, имеем $\nu_2 = 0, \nu_3 \neq 0, \nu_1 \neq 1$. Таким образом, решение Бобылева–Стеклова существует не на всех совместных уровнях интегралов энергии и момента, а только при достаточно больших значениях $h > g^2/(2A_1) - |r_1|$. \square

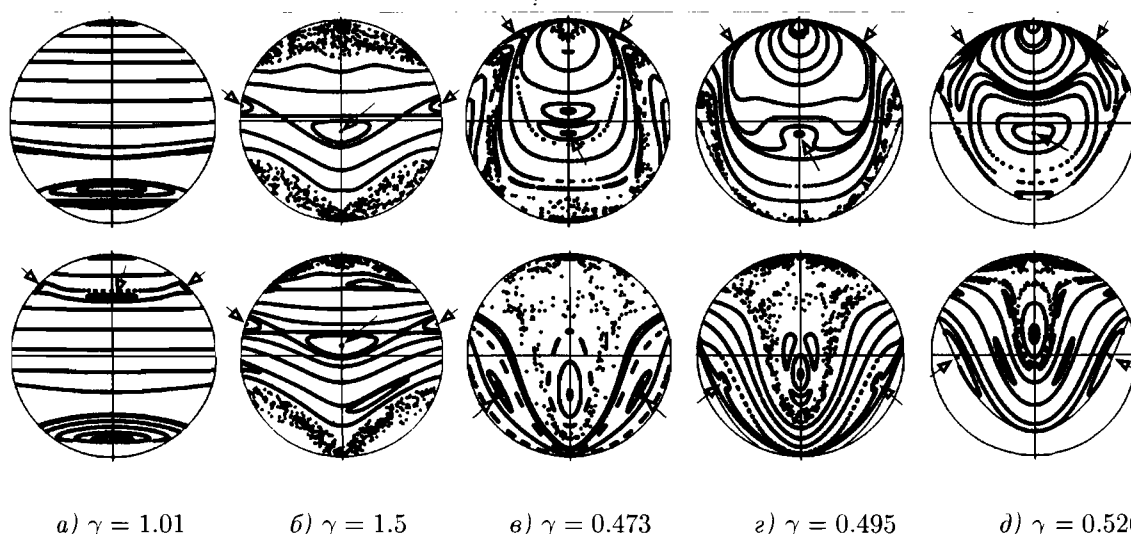


Рис. 3. Сечения поверхностей $Q_{h,g}^3$ для случаев Бобылева–Стеклова (а,б) и Ковалевского (в,г,д).

Вектор угловой скорости ω вычерчивает в теле отрезок прямой, параллельный третьей координатной оси. Граничные точки этого отрезка определяются корнями уравнения $\eta_0 + \eta_1\omega_3^2 + \eta_2\omega_3^4 = 0$, или

$$A_1^2\omega_3^4 + 8A_1(A_1\omega_1^2 - h)\omega_3^2 + 4A_1^2\omega_1^4 - 16hA_1\omega_1^2 + 16(h^2 - r_1^2) = 0, \quad (9)$$

которое имеет по крайней мере два действительных корня [9, с.81]. Постоянная величина ω_1 является действительным корнем уравнения

$$A_1^2\omega_1^3 - 2hA_1\omega_1 - 2gr_1 = 0. \quad (10)$$

На фиксированной связной компоненте поверхности $Q_{h,g}^3$ могут лежать несколько периодических траекторий решения Бобылева–Стеклова. Число действительных решений уравнений (9),(10) при заданных параметрах A_1, r_1, h, g равно удвоенному числу этих траекторий на $Q_{h,g}^3$. По старшим степеням полиномов (9),(10) устанавливаем, что число

траекторий не превосходит шести, но более точный анализ показал, что 12 действительных решений система (9),(10) не имеет. Следовательно, при изменении параметров тела в допустимых интервалах число траекторий меняется от 1 до 5. Например, в интегрируемом случае С.В.Ковалевской ($A_1 = A_2 = 2A_3$) на каждой связной компоненте $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ существуют от 1 до 5 траекторий рассматриваемого семейства точных решений. Точки пересечения неперiodических фазовых траекторий с поверхностью сечения $\mathcal{P}_{h,g}^2$ найдем из условия $F = 0$, то есть $\omega_3 \nu_2 = 0$. Если траектория угловой скорости пересекает первую координатную ось, несущую центр масс тела, тогда имеем четыре точки на $\mathcal{P}_{h,g}^2$; если $\omega_3(t)$ сохраняет знак, тогда фазовая траектория пересекает $\mathcal{P}_{h,g}^2$ в двух точках.

Поворот координатных осей подвижного базиса сводит случай $A_1 = 2A_2$ к уже рассмотренному решению. Полученная информация о частных решениях помещена в табл. 1, 2. В них указаны: топологический тип связных компонент $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ и $\mathcal{P}_{h,g}^2$; параметры, характеризующие поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2$; число циклов, которые делает периодическая траектория, последовательно возвращаясь на $\mathcal{P}_{h,g}^2$ (один цикл соответствует дуге траектории между двумя последовательными максимумами функции $|A\omega(t)|$); число траекторий данного решения на одной компоненте $\mathcal{Q}_{h,g}^3$; номера тех областей на рис. 1, а, которым принадлежат параметры (α, β) рассматриваемого семейства решений.

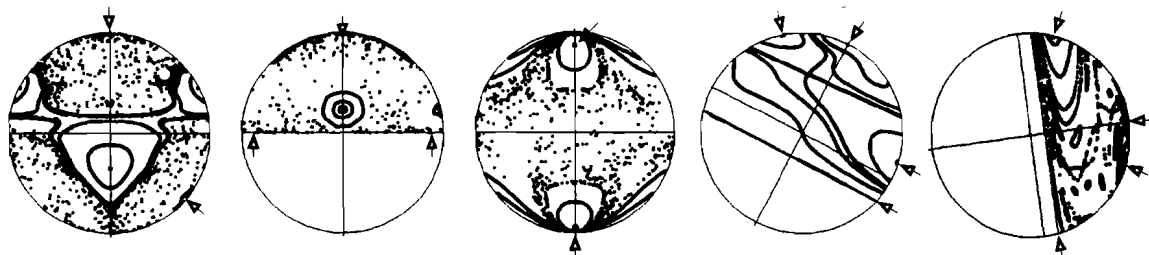
Случай Стеклова. Если центр масс тела принадлежит главной оси ($r_2 = r_3 = 0$) и выполняется неравенство $(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) < 0$, тогда частное решение задано соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= a_0 + a_1 \omega_1^2, \quad \omega_3^2 = b_0 + b_1 \omega_1^2, \\ \nu_1 &= \zeta_0 + \zeta_1 \omega_1^2, \quad \nu_2 = \eta_0 \omega_1 \omega_2, \quad \nu_3 = \xi_0 \omega_1 \omega_3. \end{aligned}$$

Функция $\omega_1(t)$ является эллиптической функцией Якоби. Интегральные константы имеют следующий вид

$$g = 0, \quad h = \left| r_1 + \frac{A_1^2 r_1}{2(A_1 - A_2)(A_3 - A_1)} \right| \in (|r_1|, \infty).$$

Зависящие от параметров значения (h, g) не принадлежат кривым (3),(7),(8), поэтому поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2$ не изменяют свой топологический тип. Двухпараметрическое семейство периодических решений Стеклова существуют только на тех $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, которые диффеоморфны проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, а поверхность $\mathcal{P}_{h,g}^2$ всегда есть тор. На каждой поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ расположены две траектории этого семейства.



а) $\alpha = 0.68, \beta = 0.38$ б) $\gamma = 1.59$ в) $\gamma \approx 0.475$ г) $\alpha = 0.6, \beta = 0.87$ д) $\alpha = 0.3, \beta = 0.97$

Рис. 4. Сечения поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ для случаев Стеклова (а), Чаплыгина (б), Докшевича (в) и Гесса-Докшевича (г,д).

Случай Горячева. Для тела с параметрами $A_3 = \gamma A_2$, $A_1 = \frac{16\gamma(1-\gamma)}{(9-8\gamma)} A_2$, $\gamma \in (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $r_2 = r_3 = 0$ известны следующие инвариантные соотношения

$$\omega_2^2 = a_0 + a_1\omega_1^2, \quad \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1^2 + b_2\omega_1^4,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1\omega_1^2 + \zeta_2\omega_1^4, \quad \nu_2 = (\eta_0 + \eta_1\omega_1^2)\omega_1\omega_2, \quad \nu_3 = \xi_0\omega_1\omega_3,$$

которые определяют две замкнутые траектории на фиксированной поверхности уровня интегралов (2). Константы интегралов имеют вид

$$g = 0, \quad h = \left[\frac{|r_1|}{(2-4\gamma)} + \frac{|r_1|}{(3-4\gamma)} + \frac{|r_1|}{(6-4\gamma)} \right] \in \left(\frac{26}{9}|r_1|, \infty \right).$$

Топология поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2$ не зависит от параметра γ . Переменная $z = \omega_1^2$ является Якоби эллиптической функцией времени.

Траекторная структура фазового пространства в окрестности решения Горячева качественно меняется с изменением γ : начиная с $\gamma = 0.5$ все близкие траектории лежат на концентрических инвариантных торах, стягивающихся к замкнутой кривой (см. рис. 5, а); уменьшение γ приводит к появлению неустойчивой периодической траектории, которая типична для резонанса 3:1 (см. рис. 5, в и рис. 239 в книге [6]); при $\gamma = 0.385$ решение принадлежит сепаратрисной поверхности (ее сечение – “восьмерка” на рис. 5, д), по терминологии [1,2] здесь два атома A перестраиваются в атом B ; дальнейшее уменьшение γ приводит к разрушению сепаратрисной поверхности, появлению регулярных “островов” и хаотических траекторий даже в малой окрестности решения Горячева.

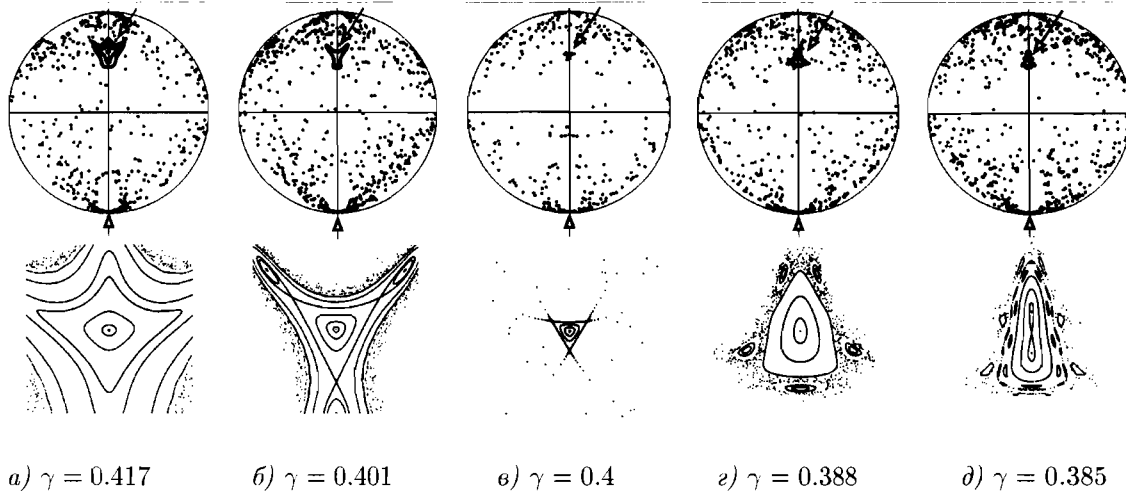


Рис. 5. Сечения поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, несущих решение Горячева.

Случай Чаплыгина. Пусть $A_2 = \gamma A_1$, $A_3 = \frac{9(2\gamma-1)}{2(16\gamma-9)} A_1$, $\gamma \in \left(\frac{3}{2}, \frac{17+\sqrt{73}}{16} \right)$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда следующая система независимых соотношений

$$\omega_2^2 = a_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + a_1\omega_1^2, \quad \omega_3^2 = b_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + b_1\omega_1^2,$$

$$\nu_1 = \zeta_0\omega_1^{\frac{2}{3}} + \zeta_1\omega_1^2, \quad \nu_2 = (\eta_0 + \eta_1\omega_1^{-\frac{4}{3}})\omega_1\omega_2, \quad \nu_3 = (\xi_0 + \xi_1\omega_1^{-\frac{4}{3}})\omega_1\omega_3$$

определяет две инвариантные кривые на фиксированной трехмерной поверхности уровня $Q^3 = \{H = 0, G = 0, I = 1\}$, которая диффеоморфна S^3 . Переменная $z = \omega_1^{\frac{2}{3}}$ связана со временем гиперэллиптической квадратурой. В окрестности решения Чаплыгина фазовые траектории имеют неустойчивое поведение. По результатам компьютерного анализа обе инвариантные кривые являются предельными циклами и принадлежат одной двумерной поверхности, которая расположена рядом с областью хаотических движений. Анализ этих движений будет проведен в отдельной работе. Без детализации на рис. 4, б стрелками показано расположение точек, принадлежащих данному периодическому решению, на поверхности сечения.

Случай Ковалевского. Пусть $A_3 = \gamma A_2, A_1 = \frac{18\gamma(1-\gamma)}{(10-9\gamma)} A_2, \gamma \in (\frac{10}{27}, \gamma_*)$, $\gamma_* \approx 0.6219$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда частное решение задано соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= a_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_1^2, \quad \omega_3^2 = b_0 + b_1\omega_1 + b_2\omega_1^2 + b_3\omega_1^3, \\ \nu_1 &= \zeta_0 + \zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_1^2 + \zeta_3\omega_1^3, \\ \nu_2 &= (\eta_0 + \eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_1^2) \omega_2, \quad \nu_3 = (\xi_0 + \xi_1\omega_1) \omega_3. \end{aligned}$$

Зависимость $\omega_1(t)$ выражена гиперэллиптической квадратурой. Существует однопараметрическое семейство поверхностей $Q_{h,g}^3$, которым принадлежит решение Н.Ковалевского. Тип этих поверхностей меняется при изменении параметра γ . В этом случае неособыми изоэнергетическими поверхностями являются $\mathbb{R}P^3, S^1 \times S^2, S^3$, они соответствуют $\gamma \in (\frac{10}{27}, \gamma_1) \cup (\gamma_1, \gamma_2) \cup (\gamma_2, \gamma_*)$, где $\gamma_1 \approx 0.48327$, $\gamma_2 \approx 0.49769$. Для $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ поверхность $P_{h,g}^2$ является сферой с тремя "ручками". Явная зависимость h, g от γ выражается с помощью громоздких формул. Дуга кривой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ пересекает две бифуркационные кривые и соединяет точки (2.269, 0.808) и (0.848, 1.885). При $\gamma \rightarrow \gamma_*$ решение стремится к устойчивому равномерному вращению вокруг вертикали.

Случай Коносевича-Поздняковича. Пусть $A_3 = \gamma A_1, A_2 = \frac{4(2\gamma-1)}{(17\gamma-8)} A_1, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_1 \approx 0.4119$, $\gamma_2 \approx 0.7082$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда решение задано следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi, \quad \omega_2 = b_0 \sin \varphi + b_1 \sin 2\varphi, \\ \omega_3^2 &= c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + c_3 \cos 3\varphi + c_4 \cos 4\varphi, \\ \nu_1 &= \zeta_0 + \zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \cos 2\varphi + \zeta_3 \cos 3\varphi + \zeta_4 \cos 4\varphi, \\ \nu_2 &= \eta_0 \sin \varphi + \eta_1 \sin 2\varphi + \eta_2 \sin 3\varphi + \eta_3 \sin 4\varphi, \\ \nu_3 &= (\xi_0 + \xi_1 \cos \varphi + \xi_2 \cos 2\varphi) \omega_3, \end{aligned}$$

где переменная $z = \cos \varphi$ связана со временем гиперэллиптической квадратурой. Это решение существует для двух наборов параметров, которые выпишем в явном виде:

$$1) (A_1, A_2, A_3) \approx (2.4277, 1.7151, 1.0), \quad r_1 = 1.0, \quad h \approx 3.0954, \quad g \approx 3.1383;$$

$$2) (A_1, A_2, A_3) \approx (1.4121, 0.5822, 1.0), \quad r_1 = 1.0, \quad h \approx 3.0672, \quad g \approx 2.3694.$$

Значения параметров позволяют указать тип $Q_{h,g}^3$ и $P_{h,g}^2$: в первом случае имеем $S^3 \cup S^3$ (периодическая траектория принадлежит одной из связных компонент) и $T^2 \cup T^2$; во втором случае имеем $S^1 \times S^2$ и M_3^2 . Заметим, что поворотом подвижных осей и масштабированием можно преобразовать случай 2) к следующей эквивалентной форме:

$$2') (A_1, A_2, A_3) \approx (2.4252, 1.7175, 1.0), \quad r_1 = 1.0, \quad h \approx 3.0672, \quad g \approx 3.1052.$$

Конечно, такое преобразование не изменяет топологию $Q_{h,g}^3$ и $P_{h,g}^2$. Для этого периодического решения нам не удалось построить в фазовом пространстве окрестность, слоенную концентрическими инвариантными торами. Все близкие траектории имеют сложную структуру, они чувствительны даже к малому изменению начальных условий. Периодическая траектория пересекает $P_{h,g}^2$ в восьми (для 1) и в двенадцати (для 2) точках, стрелками мы укажем лишь приближенное их местоположение на рис. 6, а, б.

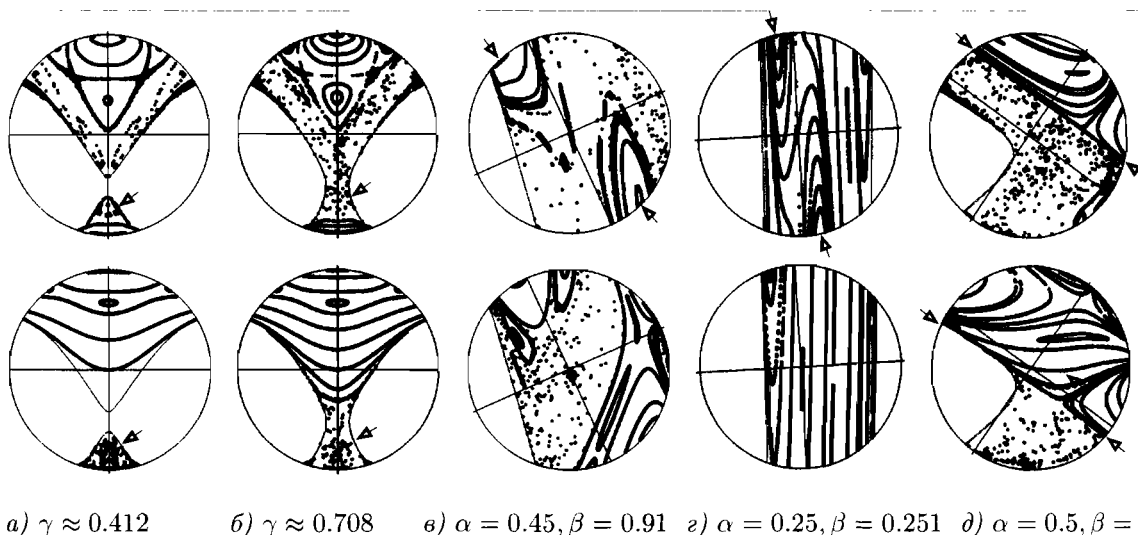


Рис. 6. Сечения поверхностей $Q_{h,g}^3$, несущих решения Коносевиича-Поздняковича (а,б), Грилли (в,г) и Гесса (д).

Случай Докшевича. При выполнении условий Н.Ковалевского существует частное решение, которое отличается от рассмотренного ранее случая. Снова положим $A_3 = \gamma A_2$, $A_1 = \frac{18\gamma(1-\gamma)}{(10-9\gamma)} A_2$, $\gamma = \frac{(25-2\sqrt{37})}{27}$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда инвариантные кривые в фазовом пространстве заданы системой соотношений

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= a_0 + a_1 z^2, \quad \omega_2^2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2, \\ \omega_3^2 &= (c_0 + c_1 z) z^2, \quad \nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1 z + \zeta_2 z^2 + \zeta_3 z^3, \\ \nu_2 &= (\eta_0 + \eta_1 z) \omega_1 \omega_2, \quad \nu_3 = (\xi_0 + \xi_1 z^{-1}) \omega_1 \omega_3. \end{aligned}$$

Переменная z связана с t гиперэллиптической квадратурой. Данное решение существует только на одной поверхности $Q_{h,g}^3$, которая соответствует константам

$$g = 0, \quad h = \frac{6(89 + 17\sqrt{37})|r_1|}{(20 - \sqrt{37})\sqrt{17 + 8\sqrt{37}}} \approx 10.2367|r_1|.$$

Таким образом, поверхность $Q_{h,g}^3$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$, а $P_{h,g}^2$ является тором.

3. Частные решения. Центр масс лежит в главной плоскости инерции.

Физический маятник. Если центр масс тела принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции ($r_3 = 0$), тогда при $h \in (-|r_1|, \infty)$, $g = 0$ и начальных условиях $\omega_1 = \omega_2 = \nu_3 = 0$ тело движется как физический маятник.

Табл. 1. $r_2 = r_3 = 0$

Решения	$\mathcal{Q}_{h,g}^3$	$\mathcal{P}_{h,g}^2$	Параметры	Циклы	Траектории	$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
Бобылев- Стеклов	$\mathbb{R}P^3, S^3$	T^2	(3) : A_2, h, g	1,2	1-5	$I - IV$
	$S^1 \times S^2, K^3$	M_3^2		1,2	1-5	$I - IV$
Стеклов	$\mathbb{R}P^3$	T^2	(2) : A_1, A_2	2	2	$I - IV$
Горячев	$\mathbb{R}P^3$	T^2	(1) : A_1	2	2	IV
Чаплыгин	S^3	T^2	(1) : A_1	2	2	IV
Ковалевский	$S^3, \mathbb{R}P^3$	T^2	(1) : A_1	4	1	IV
	$S^1 \times S^2$	M_3^2		4	1	IV
Коносевиц- Позднякович	S^3	T^2	(0)	4	1	II
	$S^1 \times S^2$	M_3^2	(0)	6	1	II
Докшевич	$\mathbb{R}P^3$	T^2	(0)	2	2	IV

Остальные фазовые переменные с помощью следующих соотношений

$$\nu_1 = \frac{r_1}{|\mathbf{r}|^2} \left(\frac{A_3}{2} \omega_3^2 - h \right) - \frac{r_2}{|\mathbf{r}|^2} \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2} \omega_3^2 - h \right)^2},$$

$$\nu_2 = \frac{r_2}{|\mathbf{r}|^2} \left(\frac{A_3}{2} \omega_3^2 - h \right) + \frac{r_1}{|\mathbf{r}|^2} \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2} \omega_3^2 - h \right)^2},$$

$$A_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - \left(\frac{A_3}{2} \omega_3^2 - h \right)^2}$$

выражаются в эллиптических функциях времени. Если $-|\mathbf{r}| < h < |\mathbf{r}|$, тогда на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, диффеоморфной сфере S^3 , существует одна траектория, которая отвечает маятниковым колебаниям центра масс вокруг главной оси. Если $h > |\mathbf{r}|$, тогда на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, диффеоморфной $\mathbb{R}P^3$, существуют две периодические траектории, которые соответствуют вращениям центра масс тела вокруг третьей оси инерции. В случае $r_2 = r_3 = 0$ число маятниковых траекторий на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ удваивается, так как движения возможны вокруг второй и третьей осей инерции. Для $g = 0$ любая неособая поверхность $\mathcal{P}_{h,g}^2$ является тором. Точки пересечения маятниковых траекторий с $\mathcal{P}_{h,g}^2$ соответствуют точкам экстремума функции $|\boldsymbol{\omega}(t)|$.

Случай Гесса. Параметры, характеризующие распределение масс, подчиним следующим условиям

$$r_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2 \sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2. \quad (11)$$

Тогда задача интегрирования уравнений (1) на двумерном инвариантном подпространстве, которое задано соотношением Гесса

$$A_1 \omega_1 r_1 + A_2 \omega_2 r_2 = 0$$

и совместными уровнями интегралов (2), сводится к эллиптической квадратуре и к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с мероморфными двоякопериодическими коэффициентами. Двумерное инвариантное подпространство Гесса принадлежит $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ и, в зависимости от значений h, g , заполнено либо квазипериодическими, либо асимптотическими траекториями, стремящимися к предельным

циклам [12]. Укажем одно интересное свойство: инвариантное подпространство всегда связно и разделяет многообразие $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ на две непересекающиеся компоненты; следовательно, любая фазовая траектория на $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ либо принадлежит семейству решений Гесса, либо целиком принадлежит одной из этих компонент. На рис. 6, \mathcal{d} подпространству соответствуют два отрезка (они отмечены стрелками), верхнюю часть поверхности сечения пересекают регулярные, а нижнюю – в основном хаотические траектории.

Бифуркационные кривые (4) делят плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на области с пятью возможными типами неособых поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ (см. рис. 2). Решение Гесса существует только на многообразиях $S^3, S^1 \times S^2$ и $\mathbb{R}P^3$. Если $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ состоит из двух связных компонент, тогда решение Гесса принадлежит той компоненте, которая диффеоморфна многообразию S^3 . Кроме того, это решение существует не при любых допустимых значениях h, g и параметрические ограничения могут быть записаны в виде неравенства. Область допустимых значений констант h, g в этом случае исследована А.М.Ковалевым [12]. Решения Гесса существуют только в той части плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$, которая ограничена кривой (4²) с параметром $\sigma_* = -|r|^2 A_3^{-1}$. Соответствующие неравенству $|\sigma| \leq \sigma_0^{-\frac{1}{4}}$ дуги этой кривой, как мы выяснили в п.1, принадлежат бифуркационному множеству (на рис. 2, a кривая (4²) разделяет области ii, iii). Подстановка $r_*^2 = (\beta - \alpha)\alpha^{-1}(1 - \beta)^{-1}$ в (6) позволяет получить уравнение кривой, которая отделяет узкую подобласть, прилегающую к интервалу $\{\alpha = \beta, \alpha \in (0.5, 0.75)\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$. Для параметров (α, β) , принадлежащих этой подобласти, бифуркационные диаграммы изображены на рис. 2, $b, в$. Почти все траектории решения Гесса имеют бесконечное число пересечений с поверхностью сечения $\mathcal{P}_{h,g}^2$, которая, в зависимости от значений h, g , является тором, M_2^2 или M_3^2 .

Случай Гриоли. Пусть $r_1\sqrt{A_3 - A_2} + r_2\sqrt{A_1 - A_3} = 0$, $A_1 > A_3 > A_2$, $r_3 = 0$, тогда существует частное решение, в котором зависимость фазовых переменных от времени выражается в тригонометрических функциях:

$$\omega_1 = a_0 + a_1 \cos \mu_0 t, \quad \omega_2 = a_1 - a_0 \cos \mu_0 t, \quad \omega_3 = \mu_0 \sin \mu_0 t,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 \cos \mu_0 t + \zeta_1 \sin^2 \mu_0 t, \quad \nu_2 = \eta_0 \cos \mu_0 t + \eta_1 \sin^2 \mu_0 t, \quad \nu_3 = (\xi_0 + \xi_1 \cos \mu_0 t) \sin \mu_0 t.$$

Двухпараметрическое семейство поверхностей $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ содержит это частное решение, константы интегралов можно выразить через параметры A_i :

$$h = \frac{A_1 + A_2}{2(A_1^2 + A_1 A_2 + A_2^2 - A_1 A_3 - A_2 A_3)^{\frac{1}{2}}}, \quad g = \frac{A_1 A_2}{(A_1^2 + A_1 A_2 + A_2^2 - A_1 A_3 - A_2 A_3)^{\frac{3}{4}}}.$$

Бифуркационные диаграммы случая Гриоли качественно не отличаются от диаграмм случая Гесса. Допустимые значения h, g принадлежат областям i, iii (см. рис. 2), следовательно, неособые $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ диффеоморфны S^3 либо $S^1 \times S^2$.

Случай Докшевича. Если параметры тела связаны условиями (11), тогда существует частное решение уравнений (1), которое отличается от решения Гесса, так как инвариантное многообразие задано системой соотношений

$$\omega_1 = a_0 z^{-1} + a_1 z, \quad \omega_2 = b_0 z^{-1} + b_1 z, \quad \omega_3^2 = c_0 z^{-2} + c_1 + c_2 z^2,$$

$$\nu_1 = \zeta_0 + \zeta_1 z^2, \quad \nu_2 = \eta_0 + \eta_1 z^2, \quad \nu_3 = \xi_0 z \omega_3.$$

Табл. 2. $r_3 = 0$

Решения	$\mathcal{Q}_{h,g}^3$	$\mathcal{P}_{h,g}^2$	Параметры	Циклы	Траектории
Физический маятник	S^3	T^2	(4) : A_1, A_2, r_1, h	2	1,2
	$\mathbb{R}P^3$	T^2		1	2,4
Гесс	$\mathbb{R}P^3, S^3, S^1 \times S^2$	T^2, M_2^2, M_3^2	(4) : A_1, A_2, h, g	∞	∞
Гриоли	S^3	T^2	(2) : A_1, A_2	1	1
	$S^1 \times S^2$	M_3^2		1	1
Докшевич	S^3	T^2	(2) : A_1, A_2	1	2

Функция $z(t)$ является эллиптической функцией Якоби. Решение принадлежит изоэнергетическим поверхностям, зависящим от двух независимых параметров. Интегральные константы имеют вид:

$$g = 0, \quad h = \frac{3A_1A_2(A_1 + A_2 - d)|\mathbf{r}|}{(A_1 + A_2 + 2d)(2A_1A_3 + 2A_2A_3 - 3A_1A_2 - 2A_3d)} + |\mathbf{r}| \in (-|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}|),$$

где $d^2 = A_1^2 + A_2^2 - A_1A_2$. Поверхности $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ диффеоморфны сфере S^3 , на каждой из них расположены две траектории этого семейства, а также расположено семейство решений Гесса. Одна из траекторий решения Гесса совпадает с траекторией физического маятника. На рис. 4, z, d отмечены точки пересечения траекторий Докшевича и Гесса с поверхностью $\mathcal{P}_{h,g}^2$, которая всегда есть тор.

1. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 413 с.
2. *Oshetkov A.A.* Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // *Advances in Sov. Math.* – 1991. – **6**. – Р. 67-146.
3. *Козлов В.В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // *Успехи матем. наук* – 1985. – **40**, вып.2. – С. 33-60.
4. *Каток С.Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Там же. – 1972. – **27**, вып.2. – С. 126-132.
5. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика.* – 1974. – N 6. – С. 99-105.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
7. *Gashenenko I.N.* Angular velocity of the Kovalevskaya top // *Regular and chaotic dynamics.* – 2000. – **5**, N 1. – Р. 104-113.
8. *Гашененко И.Н.* Инвариантные множества в пространстве угловых скоростей тяжелого гиростата // *Механика твердого тела.* – 2000. – Вып. 30. – С. 79-87.
9. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
10. *Leimanis E.* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1965. – 337p.
11. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наукова думка, 1978. – 296с.
12. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // *Прикл. математика и механика.* – 1968. – **32**, вып.6. – С. 1111-1118.