

УСРЕДНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОБЛАСТЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ КАРКАСНОГО ТИПА С ТОНКИМИ КАНАЛАМИ

We establish Γ -convergence of a sequence of integral functionals related to domains of framework-type periodic structure with thin channels. We obtain a representation for integrand of Γ -limit functional.

Встановлено Γ -збіжність послідовності інтегральних функціоналів, пов'язаних з областями періодичної структури каркасного типу з тонкими каналами. Одержано зображення для інтегранта Γ -граничного функціонала.

В работе устанавливается Γ -сходимость последовательности интегральных функционалов, связанных с областями периодической структуры каркасного типа с тонкими каналами.

Γ -сходимость — это особый вид сходимости функционалов, сопровождающийся во многих важных случаях сходимостью решений вариационных задач для этих функционалов. Для общих функционалов с единой областью определения понятие Γ -сходимости введено в [1], где также впервые были описаны общие свойства этого вида сходимости функционалов и даны его приложения к вариационным задачам. Вопросам Γ -сходимости интегральных функционалов с единой областью определения посвящены работы многих итальянских математиков (см., например, [2–5]), а также работы В. В. Жикова [6–9]. Отметим, что одним из основных достижений этих работ являются теоремы о Γ -компактности для последовательностей функционалов вариационного исчисления и интегральном представлении их Γ -пределов.

Для функционалов с переменной областью определения и соответствующих переменных вариационных задач (возникающих, например, при рассмотрении краевых задач для вариационных уравнений в перфорированных областях) понятие Γ -сходимости рассматривалось в [10–16]. В частности, в работах [12–14, 16] получены необходимые и достаточные условия Γ -сходимости последовательностей интегральных функционалов, определенных на пространствах функций $W^{k,m}(\Omega_s)$, $\dot{W}^{k,m}(\Omega_s)$, к интегральным функционалам, заданным соответственно на $W^{k,m}(\Omega_s)$ и $\dot{W}^{k,m}(\Omega)$, $\Omega_s \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \dots$. В [15] установлен результат о выборе из последовательности интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$, подпоследовательности, Γ -сходящейся к интегральному функционалу, определенному на $(W^{k,m}(\Omega))^2$.

Отметим, что ранее вопросы сходимости решений вариационных задач в переменных областях исследовались, например, в работах [17–21]. В [17–19] получены необходимые и достаточные условия сходимости решений линейных вариационных задач Дирихле и Неймана в переменных областях сложной структуры, в [20] найдены достаточные условия сходимости решений квазилинейных вариационных задач Дирихле в переменных областях, а в [21] установлены достаточные условия сходимости решений вариационных задач Неймана для интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах $W^{1,m}(\Omega_s)$. Однако результатов о Γ -сходимости и, в частности, Γ -компактности функционалов в этих работах нет.

Перейдем к описанию областей Ω_s .

Введем обозначения: $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < 1/2, i = 1, 2, 3\}$, если $y \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = y + t^{-1}Q$; если $j \in \{1, 2, 3\}$, то $K^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \forall i \neq j, |x_i| \leq 1/2\}$; $K = K^1 \cup K^2 \cup K^3$.

Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$Z_s = \{z \in \Omega : sz_i - 1/2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $Z_s \neq \emptyset$ и справедливы предложения

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{z \in Z_s} \overline{Q_s(z)} = \overline{\Omega},$$

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall z, y \in Z_s, \quad z \neq y, \quad Q_s(z) \cap Q_s(y) = \emptyset.$$

Пусть еще $0 < \alpha < \beta < 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \text{int} \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\alpha K \cap \overline{Q})),$$

$$\Omega_s^{(2)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\beta K \cap \overline{Q})).$$

Множества $\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)}$ являются областями в \mathbb{R}^3 , имеющими периодическую структуру каркасного типа. Определим множества, с помощью которых соединим эти области. Пусть

$$\delta > \frac{3}{2}, \quad 0 < \rho < \min\left(\alpha, \frac{1-\beta}{2}\right), \quad \frac{1}{2}(\beta + \rho) < \gamma < \frac{1}{2}(1 - \rho).$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_s^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\alpha}{2} \leq x_1 \leq \frac{\beta}{2}, |x_2| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}, |x_3 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}, \frac{\alpha}{2} \leq x_2 \leq \frac{\beta}{2}, |x_3| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s^3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}, |x_2 - \gamma| < \frac{\rho s^{1-\delta}}{2}, \frac{\alpha}{2} \leq x_3 \leq \frac{\beta}{2}\right\},$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s).$$

Множества H_s представляют собой объединения каналов (параллелепипедов) $z + s^{-1}\Lambda_s^i, z \in Z_s, i = 1, 2, 3$, соединяющих области $\Omega_s^{(1)}$ и $\Omega_s^{(2)}$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Множества Ω_s являются областями в \mathbb{R}^3 , содержащимися в Ω . Отметим, что эти области являются частным случаем областей, рассматривавшихся в [18, 19, 21], а затем в [15].

Положим $m = 2(\delta - 1), v = 2(\beta - \alpha)^{-1}$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $d_s = \text{dist}(\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)})$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ $d_s = (vs)^{-1}$; для любого открытого множества $E \subset \Omega$ с $\text{mes } \partial E = 0$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} d_s^{-m} \text{mes}(E \cap H_s) \leq v^{m-1} \text{mes} E \quad (1)$$

и, следовательно, рассматриваемые области удовлетворяют условиям п. 1 из [15]. Поэтому в данной ситуации можно реализовать все определения и результаты работы [15] для пространств $W^{1,m}(\Omega_s)$, $(W^{1,m}(\Omega))^2$ и заданных на них функционалов.

Обозначим для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$ через $\mathcal{G}(u)$ множество всех последовательностей $\{u_s\}$ таких, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$,

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - u^{(1)}|^m dx + \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - u^{(2)}|^m dx \right\} = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{H_s} |u_s|^m dx = 0.$$

Следующее определение является реализацией общего определения Γ -сходимости из [15].

Определение 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ J_s — функционал на $W^{1,m}(\Omega_s)$, J — функционал на $(W^{1,m}(\Omega))^2$. Будем говорить, что последовательность $\{J_s\}$ Γ -сходится к функционалу J , если:

1) для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$ существует последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{G}(u)$ такая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} J_s(w_s) = J(u);$$

2) для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$ и любой последовательности $\{u_s\} \in \mathcal{G}(u)$

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} J_s(u_s) \geq J(u).$$

Перейдем к описанию интегральных функционалов, связанных с областями Ω_s .

Пусть $c \geq 1$, μ — неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$, h — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что для любых $x, x' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, $r \in [0, 1]$,

$$c^{-1} |\eta|^m - c \leq h(x, \eta) \leq c(1 + |\eta|^m), \quad (2)$$

$$|h(x, \eta) - h(x', \eta)| \leq \mu(|x - x'|)(1 + |\eta|^m), \quad (3)$$

$$h(x, (1-r)\eta + r\eta') \leq (1-r)h(x, \eta) + rh(x, \eta'). \quad (4)$$

Зафиксируем еще функции $f^{(1)}, f^{(2)}$, которые имеют такие же свойства, как и функция h .

Определение 2. Если $s \in \mathbb{N}$, то f_s — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что для любой пары $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$f_s(x, \eta) = \begin{cases} f^{(1)}(x, \eta), & \text{если } x \in \Omega_s^{(1)}, \\ f^{(2)}(x, \eta), & \text{если } x \in \Omega_s^{(2)}, \\ h(x, \eta), & \text{если } x \in \bar{\Omega}_s^{(1)} \cup \Omega_s^{(2)}. \end{cases}$$

Таким образом, для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{R}^3$ функция $f_s(\cdot, \eta)$ измерима на Ω ; для любых $s \in \mathbb{N}$ и $x \in \Omega$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на \mathbb{R}^3 ; для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$c^{-1}|\eta|^m - c \leq f_s(x, \eta) \leq c(1 + |\eta|^m). \quad (5)$$

Определение 3. Если $s \in \mathbb{N}$, то I_s — функционал на $W^{1,m}(\Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$I_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla u) dx.$$

Задача усреднения функционалов I_s состоит в доказательстве их Γ -сходимости и эффективном вычислении интегранта соответствующего Γ -предела. Отметим, что в [22] была установлена G -сходимость нелинейных эллиптических операторов $A_s: W^{1,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{1,m}(\Omega_s))^*$. Однако условия на интегранты функционалов I_s таковы, что Γ -сходимость последовательности $\{I_s\}$, вообще говоря, не может быть получена, исходя из основного результата работы [22]. Устанавливаем Γ -сходимость последовательности $\{I_s\}$, исходя из теоремы о Γ -компактности, доказанной в [15].

Пусть

$$\Pi^1 = \text{int}(\alpha K \cap Q), \quad \Pi^2 = Q \setminus \beta K,$$

для $l \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\Pi^{l,i} = \{x \in \partial \Pi^l: x_i = -1/2\},$$

для $l \in \{1, 2\}$ $W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^l)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Pi^l)$ множества всех функций $u \in C^1(\bar{\Pi}^l)$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in \Pi^{l,i}$ $u(x) = u(x + e^i)$.

Определение 4. Если $l \in \{1, 2\}$, то $\hat{f}^{(l)}$ — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что для любой пары $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$\hat{f}^{(l)}(y, \eta) = \inf_{u \in W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^l)} \int_{\Pi^l} f^{(l)}(y, \eta + \nabla u) dx.$$

Из определения функций $\hat{f}^{(l)}$ и свойств функций $f^{(l)}$ вытекает, что для любых $l \in \{1, 2\}$, $y, y' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$-c \leq \hat{f}^{(l)}(y, \eta) \leq c(1 + |\eta|^m), \quad (6)$$

$$|\hat{f}^{(l)}(y, \eta) - \hat{f}^{(l)}(y', \eta)| \leq 6c^2 \mu(|y - y'|)(1 + |\eta|^m), \quad (7)$$

$$|\hat{f}^{(l)}(y, \eta) - \hat{f}^{(l)}(y, \eta')| \leq 2^{m+1} c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-1} |\eta - \eta'|. \quad (8)$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

\mathcal{H}_1) существует функция $\hat{h}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любых $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-m} \sum_{i=1}^3 h(y, \lambda \xi e^i) = \hat{h}(y, \xi);$$

\mathcal{H}_2) существуют функции $b_i: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, такие, что для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$h(y, \xi e^i + \eta) - h(y, \xi e^i) \geq b_i(y, \xi) \eta_i.$$

Из условия \mathcal{H}_1) и соотношений (2)–(4) вытекает, что для любых $y, y' \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$

$$3c^{-1} |\xi|^m \leq \hat{h}(y, \xi) \leq 3c |\xi|^m, \quad (9)$$

$$|\hat{h}(y, \xi) - \hat{h}(y', \xi)| \leq 3\mu(|y - y'|) |\xi|^m, \quad (10)$$

$$|\hat{h}(y, \xi) - \hat{h}(y, \xi')| \leq 3^{m+1} c (|\xi| + |\xi'|)^{m-1} |\xi - \xi'|. \quad (11)$$

Из условия \mathcal{H}_2) и (2), (4) следует, что для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$|b_i(y, \xi)| \leq 2^{m+1} c (1 + |\xi|)^{m-1}. \quad (12)$$

Пусть теперь \hat{f} — функция, заданная на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ и такая, что для любого элемента $(y, \xi, \eta, \eta') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') = \hat{f}^{(1)}(y, \eta) + \hat{f}^{(2)}(y, \eta') + \rho^2 v^{m-1} \hat{h}(y, \xi).$$

Пусть, наконец, \hat{I} — функционал на $(W^{1,m}(\Omega))^2$ такой, что для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$.

$$\hat{I}(u) = \int_{\Omega} \hat{f}(x, u^{(2)} - u^{(1)}, \nabla u^{(1)}, \nabla u^{(2)}) dx.$$

Теорема. Последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу \hat{I} .

Доказательство. Введем обозначения: если $t \in \mathbb{N}$, то

$$Y_t^0 = \{y \in \mathbb{R}^3 : t y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3; Q_t(y) \cap \Omega \neq \emptyset\};$$

если $t, s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t^0$, то

$$V_{t,s}(y) = \left\{ u \in W^{1,m}(\Omega_s): \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |u|^m dx \leq t^{-3-3m^2/(m-1)} \right\};$$

если $s \in \mathbb{N}$, то ψ_s — функция, заданная на Ω_s и такая, что

$$\psi_s = 0 \text{ на } \Omega_s^{(1)}, \quad \psi_s = 1 \text{ на } \Omega_s^{(2)},$$

$$\psi_s(x) = v_s \left(x_i - z_i - \frac{\alpha}{2s} \right) \text{ для } x \in z + s^{-1} \Lambda_s^i, \quad z \in Z_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $0 \leq \psi_s \leq 1$, $|\nabla \psi_s| \leq \nu s$ на Ω_s . Отсюда и из (1) вытекает, что последовательность $\{\psi_s\}$ удовлетворяет условиям (20)–(22) из [15] (последним двум с $k=1$; при этом $\sigma = \nu^{m-1}$).

Введем еще такие обозначения: если $s \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, то $a_s(\xi, \eta, \eta')$ — отображение Ω_s в \mathbb{R}^3 такое, что для любого $x \in \Omega_s$

$$a_s(\xi, \eta, \eta')(x) = (1 - \psi_s(x))\eta + \psi_s(x)\eta' + \xi \nabla \psi_s(x);$$

если $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, то

$$F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') = t^3 \inf_{u \in Y_{t,s}(y)} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla u) dx.$$

Для любого $t \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{Y}_t = \{y \in Y_t^0 : Q_t(y) \subset \Omega\}.$$

Из доказательства теоремы 1 из [15], учитывая неравенства (6)–(11), выводим, что для доказательства Γ -сходимости последовательности $\{I_s\}$ к функционалу \hat{I} достаточно установить справедливость предложения:

Ж) существует последовательность положительных чисел $\sigma_t \rightarrow 0$ такая, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in \tilde{Y}_t$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} |F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') - \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta')| \leq \sigma_t (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m. \quad (13)$$

Покажем, что это предложение действительно имеет место.

Зафиксируем произвольные $t \in \mathbb{N}$, $y \in \tilde{Y}_t$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$. Пусть $v^{(1)} \in W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^1)$, $v^{(2)} \in W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^2)$, причем

$$\int_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla v^{(1)}) dx = \hat{f}^{(1)}(y, \eta), \quad (14)$$

$$\int_{\Pi^2} f^{(2)}(y, \eta' + \nabla v^{(2)}) dx = \hat{f}^{(2)}(y, \eta'). \quad (15)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Pi_s = \Pi^1 \cup \Lambda_s \cup \Pi^2$. Нетрудно показать, что существует последовательность $v_s \in W^{1,m}(\Pi_s)$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad v_s|_{\Pi^1} = v^{(1)}, \quad v_s|_{\Pi^2} = v^{(2)}, \quad (16)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_s} \{|\nabla v_s|^m + |v_s|^m\} dx = 0. \quad (17)$$

Пусть теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ w_s — функция, заданная на Ω_s и такая, что

$$w_s(x) = s^{-1} v_s(s(x-z)) \quad \text{при } x \in z + s^{-1} \Pi_s, \quad z \in Z_s.$$

В силу принадлежности $v^{(1)}$ пространству $W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^1)$, $v^{(2)}$ — пространству $W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^2)$ имеем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$. Используя (16), (17), получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|w_s\|_{L^m(\Omega_s)} = 0. \quad (18)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$r_s = t^3 \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla w_s) dx.$$

Используя (1)–(6), (14)–(17) и условие \mathcal{H}_1), устанавливаем, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} |r_s - \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta')| \leq 3c^2 v^m \mu\left(\frac{2}{t}\right) (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m. \quad (19)$$

Тогда, учитывая, что в силу (18) при достаточно больших s $w_s \in V_{t,s}(y)$, получаем

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') \leq \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') + M, \quad (20)$$

где M — правая часть неравенства (19).

Получим теперь оценку снизу для нижнего предела последовательности $\{F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta')\}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_{t,s}(y)$ и

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla u_s) dx \leq [F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') + t^{-1}] t^{-3}. \quad (21)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J_s^{(1)} &= t^3 \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} \{f^{(1)}(y, \eta + \nabla u_s) - f^{(1)}(y, \eta + \nabla w_s)\} dx, \\ J_s^{(2)} &= t^3 \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(2)}} \{f^{(2)}(y, \eta' + \nabla u_s) - f^{(2)}(y, \eta' + \nabla w_s)\} dx, \\ J_s &= t^3 \int_{Q_t(y) \cap H_s} \{h(y, \xi \nabla \psi_s + \nabla u_s) - h(y, \xi \nabla \psi_s)\} dx. \end{aligned}$$

Используя (1)–(6), (14)–(17), (19), (21), находим

$$\begin{aligned} &\liminf_{s \rightarrow \infty} F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') \geq \\ &\geq \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') - 3^{m+1} M + \liminf_{s \rightarrow \infty} J_s^{(1)} + \liminf_{s \rightarrow \infty} J_s^{(2)} + \liminf_{s \rightarrow \infty} J_s. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим снизу последнее слагаемое в правой части этого неравенства. Пусть φ — функция класса $C^1(\mathbb{R}^3)$ такая, что $0 \leq \varphi \leq 1$ на \mathbb{R}^3 , $\varphi = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_t(y)$, $|\nabla \varphi| \leq 12t^2$ на \mathbb{R}^3 . Положим $\varphi_s = \varphi u_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Используя включения $u_s \in V_{t,s}(y)$ и неравенства (1), (2), (4), (5), (21), получаем

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \|\varphi_s\|_{L^m(\Omega_s)} \leq t^{-3/m-3m/(m-1)}, \quad (23)$$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \|\varphi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leq 21 v c^2 (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\limsup_{s \rightarrow \infty} \int_{Q_t(y) \cap H_s} \{h(y, \xi \nabla \psi_s + \nabla \varphi_s) - h(y, \xi \nabla \psi_s + \nabla u_s)\} dx \leq \\ &\leq 36^m c^3 v^m (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Delta_s = s^{m-1} \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^3 \left| \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i \varphi_s dx \right|.$$

Используя неравенства (23), (24), аналогично лемме 7 из [23] устанавливаем, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \Delta_s \leq c_0(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|) t^{-3-3(m-1)/m^2}, \tag{26}$$

где c_0 — положительная постоянная, зависящая только от $\alpha, \beta, \rho, m, c$. В силу условия \mathcal{H}_2) и (12) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t(y) \cap H_s} \{h(y, \xi \nabla \psi_s + \nabla \varphi_s) - h(y, \xi \nabla \psi_s)\} dx = \\ & = \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^3 \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \{h(y, \nu s \xi e^i + \nabla \varphi_s) - h(y, \nu s \xi e^i)\} dx \geq \\ & \geq \sum_{s \in Z_s} \sum_{i=1}^3 b_i(y, \nu s \xi) \int_{z+s^{-1}\Lambda_s^i} \partial_i \varphi_s dx \geq -2^m \nu^m c (1 + |\xi|)^{m-1} \Delta_s. \end{aligned}$$

Отсюда и из (25), (26) находим

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} J_s \geq -c_0 c \nu^{8m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-(m-1)/m^2}. \tag{27}$$

Оценим снизу нижний предел последовательности $\{J_s^{(1)}\}$. Используя свойства функции $f^{(1)}$, (1), (5), (21) и включения $u_s \in V_{t,s}(y)$, устанавливаем: существует последовательность функций $g_s \in C^1(\mathbb{R}^3)$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $g_s = 0$ на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_t(y)$ и

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} \{f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s) - f^{(1)}(y, \eta + \nabla u_s)\} dx \leq \\ \leq c^3 \nu^{7m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-4}. \end{aligned} \tag{28}$$

Если $s \in \mathbb{N}$, то обозначим

$$\begin{aligned} Z'_s &= \{z \in Z_s : Q_s(z) \cap Q_t(y) \neq \emptyset\}, \\ Z''_s &= \{z \in Z_s : Q_s(z) \subset Q_t(y)\}, \end{aligned}$$

n_s — число элементов множества Z'_s , m_s — число элементов множества $Z'_s \setminus Z''_s$. Имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-3} m_s = 0. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{N}$. Пусть \bar{g}_s — функция на Π^1 такая, что для любого $x \in \Pi^1$

$$\bar{g}_s(x) = \frac{s}{n_s} \sum_{z \in Z'_s} g_s(z + s^{-1}x).$$

Нетрудно убедиться в том, что $\bar{g}_s \in W_{\text{per}}^{1,m}(\Pi^1)$. Тогда, учитывая (14) и определение 4, получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla w_s) dx &\leq s^{-3} n_s \hat{f}^{(1)}(y, \eta) + cs^{-3} m_s \leq \\ &\leq s^{-3} n_s \int_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla \bar{g}_s) dx + cs^{-3} m_s. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу выпуклости функции $f^{(1)}(y, \cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla \bar{g}_s) dx &\leq n_s^{-1} \sum_{z \in Z'_s} \int_{\Pi^1} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s(z + s^{-1}x)) dx = \\ &= s^3 n_s^{-1} \sum_{z \in Z'_s} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s) dx \leq \\ &\leq s^3 n_s^{-1} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s) dx + c(1 + |\eta|)^m m_s n_s^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (30) следует

$$\begin{aligned} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla w_s) dx &\leq \\ &\leq \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s^{(1)}} f^{(1)}(y, \eta + \nabla g_s) dx + 2c(1 + |\eta|)^m s^{-3} m_s. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (28), (29) получаем

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} J_s^{(1)} \geq -c^3 v^{7m} (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-1}. \quad (31)$$

Такая же оценка верна и для нижнего предела последовательности $\{J_s^{(2)}\}$. Учитывая это, из (22), (27) и (31) получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') &\geq \\ &\geq \hat{f}(y, \xi, \eta, \eta') - c_1 \left[\mu \left(\frac{2}{t} \right) + t^{-(m-1)/m^2} \right] (1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m, \end{aligned} \quad (32)$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая только от $\alpha, \beta, \rho, m, c$.

Из (20) и (32) получаем неравенство (13), в котором $\{\sigma_t\}$ определяется равенством

$$\sigma_t = \text{const} \left[\mu \left(\frac{2}{t} \right) + t^{-(m-1)/m^2} \right].$$

Значит, предложение \mathcal{K}) справедливо. Тогда последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу \hat{I} . Теорема доказана.

Отметим, что условие \mathcal{H}_1) выполняется, например, если для любых $y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$h(y, \lambda \eta) = \lambda^m h(y, \eta).$$

Условие \mathcal{H}_2) выполняется, если для любого $y \in \Omega$ $h(y, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\partial_i h(y, \cdot)(\xi e^i) = 0.$$

Простым примером функции h , удовлетворяющей условиям \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2) и неравенствам (2)–(4), является функция, определяемая равенством

$$h(y, \eta) = |\eta|^m, \quad (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

1. De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – 1975. – 58, № 6. – P. 842–850.
2. De Giorgi E. Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area // Rend. mat. – 1975. – 8, № 1. – P. 277–294.
3. Carbone L., Sbordone C. Un teorema di compattezza per la Γ -convergenza di funzionali non coercitivi // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – 1977. – 62, № 6. – P. 744–748.
4. De Giorgi E., Dal Maso G. Γ -convergence and calculus of variations // Lect. Notes Math. – 1983. – 979. – P. 121–143.
5. Dal Maso G. An introduction to Γ -convergence. – Boston: Birkhauser, 1993. – 337 p.
6. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР. – 1982. – 267, № 3. – С. 524–528.
7. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – 47, № 5. – С. 961–998.
8. Жиков В. В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – 50, № 4. – С. 675–710.
9. Жиков В. В. О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – 183, № 8. – С. 47–84.
10. Ковалевский А. А. Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 6–9.
11. Ковалевский А. А. О связанности подмножеств соболевских пространств и Γ -сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1989. – Вып. 1. – С. 48–54.
12. Ковалевский А. А. Условия Γ -сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 5–8.
13. Ковалевский А. А. О необходимых и достаточных условиях Γ -сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 29–39.
14. Ковалевский А. А. О Γ -сходимости интегральных функционалов, связанной с вариационной задачей Дирихле в переменных областях // Докл. НАН Украины. – 1992. – № 12. – С. 5–9.
15. Ковалевский А. А. О Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 5. – С. 614–628.
16. Ковалевский А. А. Γ -сходимость интегральных функционалов и вариационная задача Дирихле в переменных областях // Там же. – № 9. – С. 1236–1254.
17. Хруслов Е. Я. Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Мат. сб. – 1977. – 103, № 4. – С. 614–629.
18. Хруслов Е. Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Там же. – 1978. – 106, № 4. – С. 604–621.
19. Хруслов Е. Я. О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 129–173.
20. Панкратов Л. С. Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей. – Харьков, 1987. – 18 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; № 11.87).
21. Панкратов Л. С. О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; № 53.88).
22. Ковалевский А. А. Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях каркасного типа с тонкими каналами // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, № 11. – С. 1503–1513.
23. Ковалевский А. А. Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях с накопителями // Там же. – 1995. – 47, № 2. – С. 194–212.

Получено 21.01.98,
после доработки — 02.07.98