НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ГАШЕНЕНКО Ігор Миколайович

УДК 531.38

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ І МНОЖИНИ ПРИПУСТИМИХ ШВИДКОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Донецьк – 2008

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий консультант: доктор фіз.– мат. наук, професор
Харламова Олена Іванівна,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України, завідувач відділу прикладної механіки.

Офіційні опоненти: доктор фіз.– мат. наук, професор
Грєбєніков Євген Олександрович,
Обчислювальний центр ім. А.О. Дородніцина РАН (м. Москва),
головний науковий співробітник;

доктор фіз.– мат. наук, професор
Міхлін Юрій Володимирович,
Національний технічний університет "ХПІ" (м. Харків),
професор кафедри прикладної математики;

член–кореспондент НАН України,
доктор фіз.– мат. наук, професор
Савченко Олексій Якович,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України (м. Київ),
завідувач відділу.

Захист відбудеться "___" ___________ 2008 р. о ___ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 11.193.01 при Інституті прикладної математики і механіки НАН України за адресою:
83114, м. Донецьк, вул. Р. Люксембург, 74.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладної математики і механіки НАН України (м. Донецьк–114, вул. Р. Люксембург, 74).

Автореферат розісланий "____"___________ 2008 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради М.В. Краснощок

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблеми динаміки абсолютно твердого тіла посідають центральне місце в сучасній теоретичній механіці. Моделювання руху фізичних об'єктів, засноване на аналітичних методах дослідження руху абсолютно твердого тіла, знаходить широке застосування у різних конструкціях, створюваних сучасною технікою. Практична важливість досліджень у динаміці твердого тіла та їх теоретична складність сприяли виникненню актуальних наукових напрямків, що стали по суті самостійними розділами механіки.

Класична задача про рух важкого твердого тіла в потенціальному полі сили тяжіння була поставлена Леонардом Ейлером, ним розроблено аналітичні методи розв'язання задач динаміки твердого тіла, які базуються на складанні й інтегруванні диференціальних рівнянь руху, віднесених до фіксованих в тілі головних осей інерції. Над цією задачею працювали Ж.Л. Даламбер, Ж.Л. Лагранж, Л. Пуансо, С.Д. Пуассон, К. Якобі, А.М. Ампер, Ж. Біне, В. Вольтерра, В. Гесс, Дж. Гріолі, Ж.Г. Дарбу, А. Зоммерфельд, Ф. Клейн, Т. Леві-Чівіта, А. Пуанкаре, У. Томсон, О. Штауде, багато інших відомих математиків і механіків. С.В. Ковалевська, М.Є. Жуковський, В.А. Стєклов, С.О. Чаплигін, О.М. Ляпунов, Л.М. Сретенський, В.В. Румянцев, П.В. Харламов здобули фундаментальні результати, які стали основою сучасних концепцій розв'язання задачі про рух твердого тіла. Сформувалися й успішно розвиваються перспективні наукові напрямки досліджень різних задач динаміки твердого тіла та їх застосувань: в Україні − О.М. Ковальов, В.М. Кошляков, І.О. Луковський, А.А. Мартинюк, О.Я. Савченко, О.І. Харламова; у Росії − В.В. Бєлєцкий, О.Д. Брюно, В.Ф. Журавльов, В.В. Козлов, А.Т. Фоменко, Ф.Л. Черноусько та інші.

Дослідження останніх років показали, що класичну задачу Ейлера про рух важкого твердого тіла з нерухомою точкою доцільно розглядати як окремий випадок більш загальної проблеми − задачі про рух важкого гіростата з постійним гіростатичним моментом. Гіростати охоплюють більш широкий клас об'єктів, таких як тіла з порожнинами, заповненими ідеальною нестисливою рідиною, яка перебуває у безвихровому русі, чи системи твердих тіл, що складаються з тіла-носія й обертових роторів. Фізично різні конструкції гіростатів розглядалися в роботах У. Томсона, Е.Дж. Рауса, М.Є. Жуковського, Т. Леві-Чівіта та У. Амальді, К. Магнуса, П.В. Харламова.

Геометричні методи мають важливе значення в динаміці твердого тіла. Суттєву роль у розвитку геометричних методів дослідження рухів відіграли кінематичні рівняння П.В. Харламова і створений на їх основі метод годографів, який дозволив отримати наочне уявлення про рух тіла в кожному відомому розв'язку задачі.

До рівнянь динаміки застосовні сучасні методи диференціальної геометрії, топології, теорії гамільтонових систем. Ідеї С. Смейла про топологічне дослідження механічних систем з симетрією знайшли застосування в багатьох класичних і сучасних задачах механіки. У задачі про рух важкого твердого тіла навколо нерухомої точки інтегральні многовиди та їх топологічні біфуркації вивчали А. Якоб, С.Б. Каток, М.П. Харламов, Я.В. Татарінов, Р.П. Кузьміна та інші. Важливою якісною характеристикою інтегровної гамільтонової системи є структура розшарування фазового простору системи на тори Ліувілля і критичні інтегральні поверхні. А.Т. Фоменко запропонував новий метод вивчення цієї структури, який дозволяє обчислювати топологічні інваріанти, названі молекулами, і класифікувати шарування на тривимірних ізоенергетичних поверхнях. Шарування Ліувілля інтегровних систем динаміки твердого тіла було вивчено і класифіковано в роботах М.П. Харламова, А.Т. Фоменка, О.В. Болсінова, А.А. Ошемкова, П. Ріхтера. Результатом розвитку цього напрямку досліджень є можливість описувати та класифікувати інтегровні системи з точністю до траєкторної еквівалентності.

Залучення геометричних і топологічних методів для дослідження характерних властивостей та закономірностей руху відкриває нові перспективи в задачах динаміки твердого тіла. У цій роботі ми розвиваємо деякі важливі ідеї, висловлені П.В. Харламовим, А.Т. Фоменком, В.В. Козловим, О.М. Ковальовим, П. Ріхтером, Ф. Холмсом, О.Д. Брюно, М.П. Харламовим, Я.В. Татаріновим, В.М. Рубановським.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, результати яких представлено у дисертації, проводилися у відповідності з планами наукових досліджень відділів прикладної та технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2001–2008 роки за бюджетними темами 1.1.4.6 "Розробка нових математичних методів дослідження сучасних задач аналітичної динаміки твердого тіла" (№0101U001093), "Якісні методи дослідження нелінійних механічних систем, їх розвиток та застосування до задач динаміки твердого тіла" (№0106U000045), виконаних згідно з постановою Бюро Відділення математики НАН України (наказ №9 від 06.12.2000, наказ №11 від 27.10.2005).

Мета і задачі досліджень. Метою дослідження є створення ефективних методів вивчення інваріантних многовидів механічних систем, якісний та кількісний аналіз на їх основі руху твердого тіла навколо нерухомої точки як у загальній постановці, так і у відомих інтегровних випадках. Для досягнення поставленої мети розв'язано наступні задачі: 1) редукція диференціальних рівнянь руху твердого тіла і гіростата, створення нових форм рівнянь, що спрощують пошук алгебраїчних інваріантних співвідношень; 2) топологічна класифікація інтегральних многовидів динамічних систем, що описують рух твердого тіла і гіростата; 3) топологічний та чисельний опис множини припустимих швидкостей твердого тіла з нерухомою точкою, побудова глобального перетину Пуанкаре та аналіз його основних властивостей; 4) необхідні умови існування мероморфних розв'язків рівнянь Ейлера−Пуассона, відшукання всіх розв'язків рівнянь Н. Ковалевського, зображуваних скінченними сумами раціональних степенів незалежної змінної; 5) характерні властивості рухів гіроскопа Ковалевської, класифікація проекцій інваріантних торів на рухомий простір кутових швидкостей; 6) топологічні інваріанти та структура інваріантних многовидів у інтегровному випадку руху гіростата, підпорядкованого умовам Ковалевської, наочне інтегрування вироджених класів рухів і узагальнення результатів Г.Г. Аппельрота на задачу про гіростат.

Об'єкт, предмет і методи дослідження. Основним об'єктом дослідження є абсолютно тверде тіло, що має нерухому точку. Предметом дослідження в дисертаційній роботі є інваріантні многовиди рівнянь Ейлера−Пуассона, кінематичні характеристики руху і, нарешті, сам рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Застосовані методи дослідження базуються на аналітичних та якісних методах теорії диференціальних рівнянь, методі Смейла топологічного вивчення інтегральних многовидів механічних систем з симетрією, сучасних трактуваннях методу фазових перетинів Пуанкаре, методах обчислення топологічних інваріантів інтегровних гамільтонових систем, методі годографів кутової швидкості кінематичного зображення руху, асимптотичному методі Ковалевської, методах і алгоритмах степеневої геометрії. Запропоновано оригінальні методи редукції рівнянь динаміки твердого тіла, дослідження та класифікації проекцій інваріантних многовидів на рухомий простір кутових швидкостей, побудови глобального фазового перетину динамічної системи.

Наукова новизна одержаних результатів:

— отримано нові форми диференціальних рівнянь руху твердого тіла і гіростата у вигляді системи другого порядку, які суттєво спрощують дослідження розв'язків з алгебраїчними інваріантними співвідношеннями;

— запропоновано новий метод вивчення і класифікації тривимірних інтегральних многовидів задачі про рух важкого твердого тіла і гіростата. У просторі параметрів визначено область існування гладкого компактного інтегрального многовиду $\boldsymbol{Q}^3_{h,g} = N^3_3$, невідомого раніше в цій задачі;

— вперше отримано рівняння обвідної поверхні, що обмежує в $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ область припустимих швидкостей твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої точки. Досліджено топологію обвідної поверхні, її залежність від конструктивних параметрів. Визначено фундаментальні властивості рухомих годографів кутової швидкості та кінетичного моменту;

— у загальній задачі про рух важкого гіростата введено сім’ю глобальних перетинів Пуанкаре, запропоновано новий метод формування глобальних фазових перетинів динамічних систем;

— для рівнянь Н. Ковалевського вперше здобуто повний реєстр (з 16 сімей) точних розв’язків, зображуваних скінченними сумами раціональних степенів незалежної змінної. Проаналізовано умови дійсності цих розв’язків;

— у інтегровному випадку С.В. Ковалевської вперше досліджено трипараметричну сім’ю сингулярних поверхонь – проекцій інтегральних многовидів на рухомий простір кутових швидкостей, узагальнено результати М.Є. Жуковського та Г.Г. Аппельрота, визначено характерні властивості рухомих годографів;

— у задачі про рух гіростата, підпорядкованого умовам Ковалевської, знайдено новий клас асимптотичних і квазіперіодичних рухів: динамічні рівняння зведено до еліптичних квадратур, виконано параметричну класифікацію рухів.

Усі результати дисертаційної роботи є новими і достовірними, отримали підтвердження комп’ютерним моделюванням, яке виконано з достатньою точністю.

Практичне значення одержаних результатів. Результати досліджень мають теоретичний характер. Створені в дисертації методи топологічного і геометричного аналізу механічних систем з симетріями можуть застосовуватися при дослідженні довільних систем звичайних диференціальних рівнянь, що мають набір алгебраїчних перших інтегралів. Отримані результати відіграють важливу роль у вивченні гамільтонових систем з двома степенями вільності і можуть використовуватися у розв'язанні різних прикладних задач механіки.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, включені в дисертацію, здобуті автором особисто. У спільних публікаціях [13,15] автору належать постановки задач, аналіз отриманих результатів, дослідження розв'язків Гесса і Бобильова−Стєклова. У статті [21] автором отримано результати пп. 2,4,6. У статті [25] знайдено нові форми рівнянь, виписаних в пп. 2,5,6. У статті [17] автору належить ідея дослідження, аналітичні викладення і результати комп'ютерного моделювання. У публікаціях [22,23] постановка задачі і метод дослідження належать О.Д. Брюно, автором виконано реалізацію обчислювальних алгоритмів, проведено відшукання і аналіз усіх сімей скінченних розкладів.

Апробація результатів досліджень. Основні результати досліджень, проведених у дисертації, доповідались та обговорювались на таких наукових семінарах та конференціях:

- Міжнародних конференціях "Устойчивость, управление и динамика твердого тела", Донецьк, 1996 р., 1999 р., 2002 р., 2005 р.;
- Конференції "Современные проблемы механики и технологии машиностроения", Москва, Росія, 1989 р.;
- Українському математичному конгресі, Київ, 2001 р.;
- Міжнародних конференціях "Классические задачи динамики твердого тела", Донецьк, 2004 р., 2007 р.;
- 5-ому Міжнародному симпозіумі з класичної і небесної механіки, Вєлікіє Лукі, Росія, 2004 р.;
- 12-й Міжнародній конференції із застосувань комп'ютерної алгебри, Софія, Болгарія, 2006 р.;
- наукових семінарах з теорії нелінійних динамічних систем Інституту теоретичної фізики Бременського університету (Бремен, Німеччина, 1993 р., 1994 р., 2001 р., керівник − професор П.Х. Ріхтер);
- науковому семінарі з аналітичної механіки (МДУ, Москва, 2004 р., керівник − академік РАН В.В. Румянцев);
- наукових семінарах кафедри диференціальної геометрії і топології (МДУ, Москва, 1997 р., 2005 р., керівник − академік РАН А.Т. Фоменко);
- семінарах відділів прикладної та технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк (1991 – 2008 рр., керівники семінару чл.–кор. НАН України П.В. Харламов, чл.–кор. НАН України О.М. Ковальов).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 25 статтях у наукових фахових журналах, що входять до переліку ВАК України, та періодичних наукових журналах інших країн. Додаткові результати досліджень опубліковано в матеріалах 15 конференцій та двох препринтах.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота викладена на 300 сторінках і складається із вступу, дев'яти розділів, висновків та списку використаних джерел із 300 найменувань, містить 17 таблиць та 34 ілюстрації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, викладено наукову новизну і теоретичне значення одержаних результатів, наведено відомості про апробацію результатів дисертації.

У першому розділі викладено етапи розвитку та основні досягнення динаміки твердого тіла, проведено огляд літератури за темою дисертації, вказано на літературні джерела, що стосуються основних напрямків досліджень інваріантних многовидів у задачах аналітичної механіки.

Диференціальні рівняння Ейлера–Пуассона, які описують поведінку твердого тіла у гравітаційному полі, мають вигляд:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

де $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор інерції у точці закріплення, $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість тіла в рухомому базисі, $\boldsymbol{\nu}$ – одиничний вектор вертикалі, $\boldsymbol{r}$ – вектор, спрямований від нерухомої точки до центра мас тіла.

Першими інтегралами системи (1.1) є

$$H = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu} = h, \ \ G = A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = g, \ \ I = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{1.2}$$

Задача про рух важкого гіростата навколо нерухомої точки − друга класична проблема, розглянута в дисертації. Якщо тверде тіло знаходиться під дією сили тяжіння і несе на собі обертові маси (маховики або рідину, що циркулює в багатозв'язних порожнинах), то його рух навколо нерухомої точки описується диференціальними рівняннями

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1.3}$$

де $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ − тензор інерції, $\boldsymbol{\omega}$ − кутова швидкість тіла-носія в рухомих осях, $\boldsymbol{\nu}$ − орт вертикалі, $\boldsymbol{\lambda}$ − постійний гіростатичний момент і $\boldsymbol{r}$ − вектор, спрямований від нерухомої точки до центра мас гіростата. Рівняння (1.3) також допускають три перших інтеграли:

$$H = \frac{1}{2} A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = h,\;\; G = (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{v} = g,\;\; I = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 1. \qquad (1.4)$$

Обговорюються геометричні і топологічні методи вивчення механічних систем з симетрією. Із огляду літератури зроблено висновок про доцільність досліджень інваріантних многовидів динамічних систем (1.1), (1.3).

У другому розділі запропоновано нові методи редукції рівнянь (1.1) руху твердого тіла навколо нерухомої точки та їх узагальнень (1.3) на задачу про рух гіростата. Запропоновано заміни змінних, що спрощують пошук алгебраїчних інваріантних співвідношень. З використанням змінних Гесса, Харламова, Андуайе−Депрі отримано нові форми динамічних рівнянь.

В якості первинних прийняті змінні $M_1, M_2, M_3 -$ компоненти моменту кількості руху гіростата в прямокутній системі координат, перша вісь якої проходить через центр тяжіння, а інші обрані так, щоб гіраційний тензор a мав серед компонент $a_{23} \equiv a_{32} = 0.$ У новому базисі $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ кінетична енергія гіростата набирає видгляду

$$T = \frac{1}{2} a\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M} - a\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{M} + \frac{1}{2} a\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}. \qquad (2.1)$$

Заміною координат

$$M_1 = \frac{1}{s}\sin\varphi_2,\, M_2 = \frac{1}{s}\cos\varphi_2 \sin\varphi_1,\, M_3 = \frac{1}{s}\cos\varphi_2\cos\varphi_1 \qquad (2.2)$$

рівняння (1.3) зведено до системи

$$\begin{cases} \varphi_1' = \chi^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2},\; \varphi_2' = -\chi^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + s^{-1}\mathrm{tg}\varphi_2, \\ \dfrac{ds}{dt} = \chi,\;\; \chi = s\cos\varphi_2\sqrt{s^2 - g^2 s^4 - \Phi^2}, \\ \Phi = \left[T - h - gs\sin\varphi_2\right] s/\cos\varphi_2. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Перші два рівняння (2.3) утворюють неавтономну підсистему другого порядку, s − незалежна змінна, $' \overset{\text{def}}{=} d/ds;$ φ_1, φ_2 − дві залежні змінні, T знаходимо підстановкою (2.2) у (2.1). Якщо залежність φ_1, φ_2 від s знайдена, то функція $s(t)$ визначається з третього рівняння (2.3). У базисі $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ компонентами орта вертикалі $\boldsymbol{v}$ є

$$\begin{aligned} v_1 &= gs\sin\varphi_2 + s^{-1}\Phi\cos\varphi_2, \\ v_2 &= [gs\cos\varphi_2 - s^{-1}\Phi\sin\varphi_2]\sin\varphi_1 + \sqrt{1 - g^2s^2 - s^{-2}\Phi^2}\cos\varphi_1, \\ v_3 &= [gs\cos\varphi_2 - s^{-1}\Phi\sin\varphi_2]\cos\varphi_1 - \sqrt{1 - g^2s^2 - s^{-2}\Phi^2}\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

У нерухомому базисі $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ кінетичний момент $\boldsymbol{M}$ має компоненти

$$m_1 = g,\; m_2 = \sqrt{s^{-2} - g^2}\cos\varphi_3,\; m_3 = \sqrt{s^{-2} - g^2}\sin\varphi_3,$$

де φ_3 − кут прецесії вектора $\boldsymbol{M}$ − визначається диференціальним рівнянням

$$\varphi_3' = -\frac{s}{\chi}\sin\varphi_2 + \frac{s}{\chi}\frac{g\Phi\cos\varphi_2}{(1-g^2s^2)}.$$

Окремо розглянуто випадок, коли центр мас тіла міститься в головній площини інерції: $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, 0)$. У припущенні $a_{22} \neq a_{33}$ рівняння Ейлера−Пуассона (1.1) зведено до системи з двох рівнянь

$$\begin{aligned} &\left[((\tau+\mu)x-g)x' + (\mu - x^2)\tau' + b_0x^2 - \tau - h\right]^2 - \left(b_0x^2-\tau-h\right)x^2b_1 = 0, \\ &\left[1-(\tau+\mu)^2\right]x'^2 + 2\left[(\tau+\mu)x-g\right]x'\tau' + (\mu-x^2)\tau'^2 + \left(b_0x^2-\tau-h\right)b_2 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

де $\mu = |\boldsymbol{M}|^2$ − незалежна змінна, $' \overset{\mathrm{def}}{=} d/d\mu,$ залежними змінними системи є $\tau = T - h - a_{33}\mu/2,\ x = M_1 \overset{\mathrm{def}}{=} A\omega\cdot r,$ сталі коефіцієнти b_0, b_1, b_2 виражаються через компоненти гіраційного тензора:

$$b_1 = a_{12}^2/[(a_{33}-a_{22})a_{33}],\ b_0 = b_1 + (a_{11}-a_{33})/a_{33},\ b_2 = (a_{22}-a_{33})/a_{33}.$$

Якщо залежність τ та x від μ знайдена з рівнянь (2.4), то $\mu(t)$ випливає з додаткового рівняння

$$\dot\mu^2 = \mu - x^2 - g^2 + 2gx(\tau+\mu) - \mu(\tau+\mu)^2. \tag{2.5}$$

Узагальнюючі (2.4) рівняння отримано для гіростата в припущенні $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$.

У третьому розділі досліджено біфуркації інтегральних многовидів

$$\boldsymbol{Q}_{h,g}^3 = \{H = h,\ G = g,\ I = 1\} \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\nu})$$

рівнянь Ейлера−Пуассона у випадку, коли центр мас тіла належить головній площини інерції. Проаналізовано трипараметричну сім'ю біфуркаційних діаграм і досліджено п'ятипараметричну сім'ю інтегральних 3-многовидів.

Нехай центр мас твердого тіла розташований у головній площині інерції, тоді без обмеження спільності покладемо

$$|\boldsymbol{r}| = 1,\ r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ r_3 = 0,\ A_1 > A_2. \tag{3.1}$$

Образом множини критичних точок інтегрального відображення

$$F = H \times G:\ \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times S^2(\boldsymbol{\nu}) \to \mathbf{R}^2(h,g)$$

є біфуркаційна діаграма $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,g)$, яка складається з кривих

$$\begin{aligned} B_1: h &= \frac{A_2r_1\tau^3 + (3A_2-2A_1)r_2\tau^2 + (3A_1-2A_2)r_1\tau + A_1r_2}{2(A_1-A_2)\tau(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \\ g &= \frac{(A_1+A_2\tau^2)\,|r_1\tau+r_2|^{\frac{1}{2}}}{|\tau|^{\frac{1}{2}}(A_1-A_2)^{\frac{1}{2}}(\tau^2+1)^{\frac{3}{4}}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\tau \in (-\infty, -r_2r_1^{-1}) \cup (-r_2r_1^{-1}, 0) \cup (0, \infty);$$

$$B_2: h = \frac{1}{2}\frac{A_3}{\sigma^2} + \frac{3}{2}\sigma^2\sigma_*,\ \ g = \frac{A_3}{\sigma} + \sigma^3\sigma_*,\ 0 < |\sigma| < \sigma_0^{-\frac{1}{4}}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_* = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)}, \ \sigma_0 = \frac{r_1^2}{(A_1 - A_3)^2} + \frac{r_2^2}{(A_2 - A_3)^2},$$

доповнених за безперервністю точками $(h,g) = (\pm 1,0)$.

Різні гілки біфуркаційної діаграми Σ можуть перетинатись і дотикатись одна до одної в деяких точках. Доведено, що виродженню біфуркаційних діаграм відповідають розв'язки алгебраїчних рівнянь

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_8 = 0,$$

де f_i − знайдені в роботі поліноми від трьох змінних

$$\alpha = A_2/A_1, \ \beta = A_3/A_1, \ r_* = r_2/r_1.$$

В дисертації вивчено всі можливі точки перетинання і дотикання кривих B_1, B_2. В результаті у просторі параметрів $\mathbf{R}^3(\alpha,\beta,r_*)$ знайдено точні алгебраїчні рівняння відокремлювальних поверхонь і виділено області з різними типами біфуркаційних діаграм Σ.

Теорема 1. *У випадку, коли центр мас твердого тіла лежить в одній з головних площин інерції, біфуркаційна множина інтегрального відображення* F*, яка описується параметричними рівняннями (3.2),(3.3), включає 46 якісно різних типів невироджених біфуркаційних діаграм* $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,g)$.

Теорема 2. *Якщо параметри твердого тіла задовольняють умовам (3.1), то на будь-якому особливому (критичному) многовиді* $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ *можуть існувати не більш чотирьох критичних точок інтегрального відображення* F.

Топологія інтегральних 3-многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ та їх перебудови при зміні значення енергії h цілком визначаються ефективним потенціалом − функцією

$$U_g(\boldsymbol{\nu}) = \frac{g^2}{2(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu},$$

заданою на сфері Пуассона $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$.

Теорема 3. *Нехай розподіл мас твердого тіла задовольняє умовам (3.1), тоді при будь-якому фіксованому значенні інтеграла* G *ефективний потенціал* $U_g(\boldsymbol{\nu})$ *має не менш двох, але не більш десяти критичних точок на сфері Пуассона.*

Наслідок 1. *Асиметричне тверде тіло, центр мас якого знаходиться в головній площині інерції, має не менш двох, але не більш десяти рівномірних обертань при кожному фіксованому значенні інтеграла* G.

Наслідок 2. *Вісесиметричне тверде тіло, центр мас якого не належить осі динамічної симетрії, має не менш двох, але не більш шести рівномірних обертань при кожному фіксованому значенні інтеграла* G.

Встановлено топологію многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ та їх проекцій $\boldsymbol{U}_{h,g} = \{U_g(\boldsymbol{\nu}) \le h\} \subset S^2$, що називаються областями можливості руху.

Теорема 4. *У випадку, коли центр мас твердого тіла знаходиться в одній з головних площин інерції, топологічна структура неособливих многовидів* $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}, \boldsymbol{U}_{h,g}$ *визначається таблицею 1.*

Табл. 1. Неособливі многовиди $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ та їх проекції на сферу.

№	*i*	*ii*	*iii*	*iv*	*v*	*vi*	*vii*	*viii*
l	0	1	2	3	4	11	12	111
$\boldsymbol{U}_{h,g}$	S^2	D^2	$D^1 \times S^1$	D^2_2	D^2_3	$D^2 \cup D^2$	$D^2 \cup (D^1 \times S^1)$	$D^2 \cup D^2 \cup D^2$
$\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$	$\mathbf{R}P^3$	S^3	$S^1 \times S^2$	N^3_2	N^3_3	$S^3 \cup S^3$	$S^3 \cup (S^1 \times S^2)$	$S^3 \cup S^3 \cup S^3$

В табл. 1 позначено: D^2_k − 2-диск з k отворами, S^3 − тривимірна сфера, N^3_k, при $k \geq 1$, − зв’язна сума k екземплярів 3-многовиду $S^1 \times S^2$, $\mathbf{R}P^3$ − проективний простір, l − рід зв’язних компонентів многовидів $\boldsymbol{U}_{h,g}, \boldsymbol{Q}^3_{h,g}$.

Визначено явні значення параметрів, при яких існує неособливий многовид $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ роду $l = 4$:

$$A = (2.0, 1.18, 1.13),\ \boldsymbol{r} = (0.99849, 0.054917, 0.0),\ h = 2.034237,\ g = 2.02485.$$

Топологія неособливих 3-многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ не змінюється при малому збурюванні параметрів $\alpha, \beta, r_*, h, g.$ Зокрема, в задачі про рух важкого гіростата навколо нерухомої точки існують усі типи многовидів, наведені в таблиці 1.

У четвертому розділі вивчено образи інтегральних многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ у просторі $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$. У фазовому просторі побудовано двовимірну поверхню перетину Пуанкаре і класифіковано можливі типи цих поверхонь, що залежать від значень констант перших інтегралів.

Нехай $p : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{\omega}$ є відображенням проектування фазового простору $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{R}^3(\boldsymbol{v})$ на перший співмножник. Замкнена область $\boldsymbol{V}_{h,g} = p(\boldsymbol{Q}^3_{h,g})$ − проекція многовиду $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ на простір $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$. Точка $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ належить образу $\boldsymbol{V}_{h,g} = p(\boldsymbol{Q}^3_{h,g})$ тоді і тільки тоді, коли існує дійсний розв’язок (v_1, v_2, v_3), що задовільняє трьом першим інтегралам (1.2). Безпосередньо з умови

$$\frac{D(H, G, I)}{D(v_1, v_2, v_3)} = 0$$

випливає $F \overset{\text{def}}{=} (A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{r} = 0.$ Виключенням v_i з рівняння $F = 0$ та інтегралів (1.2) отримано рівняння

$$f \overset{\text{def}}{=} |A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}|^2 - \left| \left(\frac{1}{2} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - h \right) A\boldsymbol{\omega} - g\boldsymbol{r} \right|^2 = 0$$

двовимірної поверхні, що обмежує в $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ замкнену область

$$\boldsymbol{V}_{h,g} = \{f(\boldsymbol{\omega}) \geq 0\} \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}).$$

Назвемо $\boldsymbol{V}_{h,g}$ *областю припустимих швидкостей*, що відповідають фіксованій поверхні $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$; її край

$$\partial \boldsymbol{V}_{h,g} = \{f(\boldsymbol{\omega}) = 0\} \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$$

назвемо *обвідною поверхнею*. У інтегровних випадках $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$ є обвідною поверхнею для однопараметричної сім'ї сингулярних поверхонь − образів інваріантних торів Ліувілля.

Вивчено особливі точки дійсної поверхні $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$, які задовольняють рівнянням $f(\boldsymbol{\omega}) = 0$, $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{\omega}) = 0$.

Доведено важливу властивість: вісь з ортом $\boldsymbol{l} = \dfrac{A^{-1}\boldsymbol{r}}{|A^{-1}\boldsymbol{r}|}$ перетинає замкнену область $\boldsymbol{V}_{h,g} \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ не більш ніж у трьох різних точках. Ці точки перетинання є особливими точками обвідної поверхні $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$. У загальному випадку дотичні до $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$ в особливій точці утворюють конус, тому що матриця других частних похідних функції $f(\boldsymbol{\omega})$ є невиродженою. Знайдено біфуркаційну множину

$$\Sigma' : (A^{-1}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})g^2 - 2(h \pm 1) = 0, \qquad \Sigma'' : 8h^3 - 27g^2(A^{-1}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = 0,$$

яка відокремлює топологічно різні поверхні $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$.

Теорема 5. *При фіксованих сталих (h,g) усі траєкторії, що відповідають розв'язкам $\boldsymbol{\omega}$=$\boldsymbol{\omega}(t)$ рівнянь Ейлера-Пуассона (1.1), належать до тривимірної області $\boldsymbol{V}_{h,g} = p(\boldsymbol{Q}^3_{h,g})$. При цьому виконуються наступні властивості:*

а) будь-яка точка множини $\boldsymbol{V}_{h,g} \setminus \partial \boldsymbol{V}_{h,g}$ має рівно два прообрази на многовиді $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$;

б) всі особливі точки дійсної обвідної поверхні $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$ або відповідають відносним рівновагам тіла, або належать осі з ортом $\boldsymbol{l}$;

в) класифікацію можливих типів обвідних поверхонь $\partial \boldsymbol{V}_{h,g}$ задають криві Σ', Σ'' та біфуркаційна множина $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,g)$.

У п'ятому розділі з'ясовано топологію тривимірних інтегральних многовидів, яким належать усі відомі точні розв'язки рівнянь Ейлера−Пуассона.

Вивчено умови існування сім'ї періодичних розв'язків, знайдених В.А. Стєкловим та Д.К. Бобильовим. Зокрема, встановлено наступне: якщо константи h, g пов'язані нерівністю $h \le g^2/(2A_1) - |r_1|$, то на многовиді $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ не існує розв'язку Бобильова−Стєклова. На фіксованій зв'язній компоненті поверхні $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ можуть розташовуватися кілька періодичних траєкторій розв’язку Бобильова−Стєклова. Доведено, що при зміні параметрів тіла в припустимих інтервалах число цих траєкторій змінюється від 1 до 5.

Результати розділів 3,4 застосовано до вивчення інтегральних многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ динамічних систем, відповідних до умов Гесса. Побудовано біфуркаційні діаграми $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,g)$, класифіковано можливі типи інтегральних многовидів. Доведено, що інварінтна множина розв’язку Гесса існує тільки на 3-многовидах S^3, $S^1 \times S^2$ та $\mathbf{R}P^3$. Якщо $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ складається з двох зв’язних компонентів, то розв’язок Гесса належить тій компоненті, що є дифеоморфною до тривимірної сфери S^3.

Досліджено властивості збурених рухів поблизу нестійких маятникових обертань несиметричного тіла навколо нерухомої горизонтальної осі в слабкому полі тяжіння. Впроваджено спеціальні канонічні змінні, які значною мірою спрощують вивчення розщеплення сепаратрисних поверхонь. Описано якісні властивості гетероклінічних траєкторій у нерухомому базисі.

У шостому розділі досліджено класичний інтегровний випадок, знайдений С.В. Ковалевською при умовах $A_1 = A_2 = 2A_3$, $\boldsymbol{r} = (r_1, 0, 0)$. Досліджено трипараметричну сім’ю сингулярних поверхонь − проекцій інтегральних многовидів $J_{h,k,g}$ на рухомий простір кутових швидкостей.

Двовимірну дійсну поверхню

$$P_{h,k,g} = p(J_{h,k,g}) \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$$

визначимо як множину точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$J \overset{\text{def}}{=} (\eta_1^2 + \eta_2^2)r^4 + \eta_3 r^2 + \eta_4^2 = 0, \tag{6.1}$$

де

$$\eta_1 = \mathrm{Re}P(p+iq),\ \ \eta_2 = \mathrm{Im}P(p+iq),\ \ P(x) = -x^4 + 2hx^2 + 2gx + 1 - k^2,$$

$$\eta_3 = -\frac{1}{2}q^{-2}\eta_1\eta_2^2 + 4\eta_2^2(2p^2 - h) + 8\eta_1 q^2\left[(2p^2 - h)^2 - k^2\right],$$

$$\eta_4 = \frac{1}{4}q^{-2}\eta_2^2 + 4q^2[(2p^2 - h)^2 - k^2].$$

Особливими будуть ті точки поверхні $P_{h,k,g}$, у яких виконуються рівності

$$J(\boldsymbol{\omega}) = 0, \qquad \mathrm{grad}\, J(\boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{6.2}$$

Безпосередньо з рівнянь (6.2) випливає, що всі особливі точки поверхні $P_{h,k,g}$ (подвійні точки, точки розгалуження і т.і.) задовольняють або рівнянням

$$\eta_2 \overset{\text{def}}{=} 4q(pq^2 - p^3 + hp + g/2) = 0,\ \ \eta_1 r^2 \pm \eta_4 = 0,$$

або рівнянням

$$\eta_4 \overset{\text{def}}{=} 4(pq^2 - p^3 + hp + g/2)^2 + 4q^2[(2p^2 - h)^2 - k^2] = 0, r = 0.$$

Таким чином, умови (6.2) виконані на множині

$$\boldsymbol{S} = \bigcup_{i=1}^{3} \boldsymbol{S}_i \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{S}_1 = \{\boldsymbol{\omega}\colon\ \eta_2 = 0, q \neq 0, \eta_1 r^2 + \eta_4 = 0\},$$

$$\boldsymbol{S}_2 = \{\boldsymbol{\omega}\colon q = 0, \eta_1 r^2 - \eta_4 = 0\}, \quad \boldsymbol{S}_3 = \{\boldsymbol{\omega}\colon r = 0, \eta_4 = 0\},$$

що складається з особливих точок поверхні $P_{h,k,g}$. У деяких точках множини $\boldsymbol{S}$ відбувається перетинання різних компонентів, що складають $P_{h,k,g}$, в інших точках відбуваються самоперетинання. Другий випадок більш важливий для дослідження, тому що приводить до самоперетинань траєкторій у $\mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega})$.

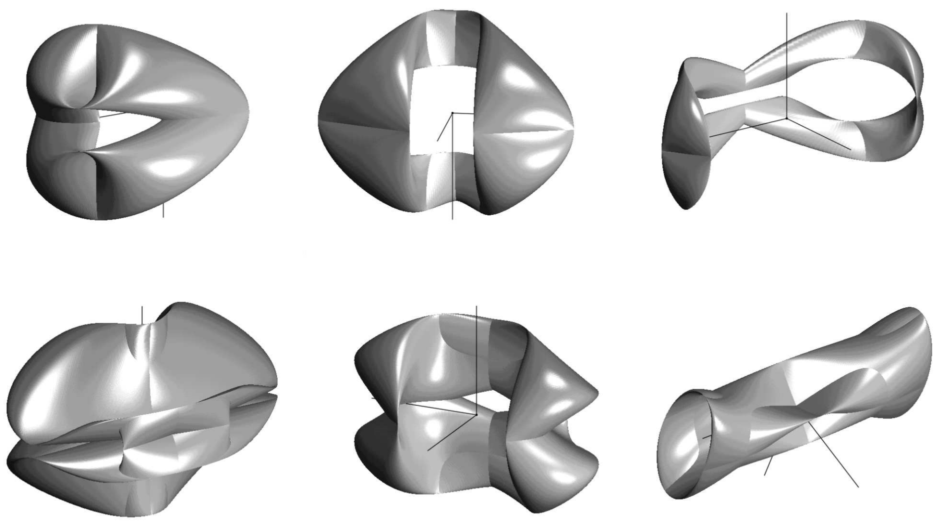


Рис. 1. Сингулярні поверхні $P_{h,k,g}$ для розв'язку Ковалевської.

Надано повну класифікацію можливих типів сингулярних поверхонь $P_{h,k,g}$. Рис. 1 частково ілюструє складну побудову поверхнонь $P_{h,k,g}$ та відповідні їм біфуркації. Визначено характерні властивості рухомих годографів для різних значень констант перших інтегралів. Отримані результати узагальнюють результати М.Є. Жуковського та Г.Г. Аппельрота про геометричну структуру областей змінювання кутової швидкості гіроскопа С.В. Ковалевської.

У п. 6.2 досліджено рухи гіроскопа Ковалевської методом годографів на нульовому рівні інтеграла момента. Особливу увагу приділено якісним властивостям двочастотних асимптотичних і квазіперіодичних рухів. Вивчено залежність руху від значень констант перших інтегралів. Симетричність розглянутого в роботі класу рухів суттєво спрощує дослідження годографів кутової швидкості не тільки в осях, зв'язаних з тілом, але й у нерухомому базисі. Саме при нульовій константі інтеграла моменту для деяких областей можливих рухів середня прецесія тіла навколо вертикалі дорівнює нулю.

У сьомому розділі вивчено необхідні умови існування алгебраїчних інваріантних співвідношень для рівнянь руху важкого твердого тіла з нерухомою точкою. Досліджено залежність такої інтегрованості від фізичних параметрів, що характеризують розподіл мас у твердому тілі. Методом Ковалевської проведено локальний аналіз рухомих полюсів та алгебраїчних точок розгалуження розв'язків рівнянь Ейлера−Пуассона. Складено карти розташування раціональних показників Ковалевської у просторі параметрів твердого тіла.

Як правило, відомі точні розв'язки рівнянь (1.1), (1.3) є мероморфними або на самій комплексній площині часу, або на її $n-$ листковому накритті. Вивчено можливість локального представлення компонентів векторів $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ у вигляді степеневих рядів

$$\omega_i = (t-t_0)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_i^{(k)} (t-t_0)^{\frac{k}{n}}, \ \nu_i = (t-t_0)^{\beta_i} \sum_{k=0}^{\infty} \nu_i^{(k)} (t-t_0)^{\frac{k}{n}}, \tag{7.1}$$

де n − ціле число, α_i, β_i − раціональні числа, серед яких обов'язково знайдуться від'ємні, а коефіцієнти $\omega_i^{(k)}, \nu_i^{(k)}$ є комплексними числами або функціями параметрів. Знайдено багатопараметричні сім'ї рядів (7.1), що описують поводження відомих точних розв'язків рівнянь Ейлера−Пуассона (1.1) в околі критичних полюсів на комплексній площині часу. Як продовження досліджень Г.Г. Аппельрота доведено теорему, що суттєво звужує клас припустимих алгебраїчних частинних розв'язків рівнянь руху твердого тіла.

Теорема 6. *Якщо розв'язок рівнянь Ейлера−Пуассона з дійсними параметрами r_i, A_i $(A_1 > A_2 > A_3 > 0)$ допускає в околиці рухомої особливої точки асимптотичне розкладання в степеневі ряди (7.1), то показники перших членів розкладу задовільняють співвідношенням*

$$1)\ \frac{1}{2}\min_i \beta_i \geq \min_i \alpha_i = -1.$$

Якщо розв'язок рівнянь Ейлера−Пуассона у вісесиметричному випадку $(r_1 \neq 0,$ $r_2 = 0,\ \ A_1 = A_2 \neq A_3)$ допускає асимптотичне розкладання в ряди (7.1), то мають місце співвідношення

$$2)\ \min_i \beta_i = -2, \quad -1 \geq \min_i \alpha_i \geq -3.$$

Основна частина цього розділу присвячена дослідженню точних розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} f_1 &\overset{\text{def}}{=} \sigma''\tau + \frac{\sigma'\tau'}{2} + a_1 + a_2\sigma + a_3 p\tau' + a_4\tau + a_5 p^2 = 0, \\ f_2 &\overset{\text{def}}{=} \sigma\tau'' + \frac{\sigma'\tau'}{2} + b_1 + b_2 p\sigma' + b_3\sigma + b_4\tau + b_5 p^2 = 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Рівняння (7.2) були отримані Н. Ковалевським у 1908 р., вони описують рух твердого тіла навколо нерухомої точки в окремому випадку $\boldsymbol{r} = (r_1, 0, 0).$ Нормовані сталі параметри системи (7.2) мають такий вигляд:

$$x = A_1/A_3,\ y = A_2/A_3,\ \xi = r_1/A_3,\ z = 2h/A_3, \lambda = g\,/\,A_3.$$

Базуючись на концепціях степеневої геометрії, О.Д. Брюно нещодавно запропонував універсальні алгоритми локального і асимптотичного аналізу розв'язків нелінійних систем рівнянь. Перелік найважливіших результатів застосування нових методів дослідження до системи рівнянь (7.2) наведено у стислому огляді[*].

В роботі [22] була поставлена задача: *знайти всі такі розв'язки* $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *системи (7.2), які є скінченними сумами раціональних степенів* p *:*

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k \, p^{\alpha_k}, \;\; \tau = \sum_{l=0}^{n} \tau_l \, p^{\beta_l}, \tag{7.3}$$

де α_k, β_l *− раціональні числа, сталі* $\sigma_k, \tau_l \in \mathbf{C}$; $\sigma_0, \sigma_m, \tau_0, \tau_n \neq 0$.

Для вирішення цієї задачі був використаний перелік усіх 23 сімей $\mathsf{F}_1 - \mathsf{F}_{21}$, F_{23}, F_{24} степеневих розкладів

$$\sigma = \sigma_0 \, p^{\alpha} + \sum \sigma_{\alpha+s} \, p^{\alpha+s}, \;\; \tau = \tau_0 \, p^{\beta} + \sum \tau_{\beta+s} \, p^{\beta+s}, \;\; s \in K \tag{7.4}$$

розв'язків системи (7.2). Якщо скінченний розклад (7.3) записати у вигляді

$$\sigma = \sigma_0 p^{\alpha_1} + \ldots + \sigma_n p^{\alpha_2}, \;\; \tau = \tau_0 p^{\beta_1} + \ldots + \tau_m p^{\beta_2},$$

де $\alpha_1 \leq \alpha_2$ і $\beta_1 \leq \beta_2$, то результати можна представити таблицею 2. Її стовпці відповідають молодшим степеням (хвостам), а рядки − старшим степеням (головам) скінченних розкладів (7.3). Зірочкою * позначено відомі розв'язки, знак + позначає новий розв'язок, знак − позначає відсутність розв'язків.

Табл. 2. Скінченні розклади з раціональними показниками.

			F_1	F_3	F_4	F_5	F_7	F_{23}
			$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 2/3$	$\alpha_1 = -1$	$\alpha_1 < 0$	$\alpha_1 \in (0,1)$
			$\beta_1 = 1$	$\beta_1 = 0$	$\beta_1 = 2/3$	$\beta_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\beta_1 \in (1,2)$
F_9	$\alpha_2 > 2$	$\beta_2 = 2$	−	*	*	−	−	−
F_{10}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 > 2$	*	*	+	−	+	−
F_{11}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2/3$	−	−	+	−	−	−
F_{12}	$\alpha_2 = 2/3$	$\beta_2 = 2$	−	−	+	−	−	−
F_{13}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	−	−	−	−	−	−
F_{14}	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	−	−	−	−	−	−
F_{15}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	−	−	*	−	−	−
F_{16}	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	−	−	*	−	−	−
F_{17}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 \in (1,2)$	−	−	−	−	−	−
F_{18}	$\alpha_2 \in (1,2)$	$\beta_2 = 2$	−	−	−	−	−	−
F_{19}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	−	*	*	−	+	−
F_{20}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	*	*	−	+	+	−
F_{21}	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2$	*	*	−	−	−	−

[*] Брюно А.Д.Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы/ А.Д. Брюно// Прикл. математика и механика.–2007. – 71, вып. 2. – С.192–227.

У такий спосіб було знайдено всі розв'язки рівнянь (7.2), які можна записати скінченними сумами (7.4) раціональних степенів незалежної змінної. Усього знайдено 16 основних розв'язків і ще 14 симетричних, які можна одержати з основних розв'язків простим перетворенням координат. Новими є

$$\boldsymbol{R}_1: \quad x = y = 2, z = 0, \lambda \neq 0,$$
$$\sigma = \frac{\xi\lambda}{8} p^{-1} + \frac{\xi}{2\lambda} p - \frac{p^2}{2}, \tau = -2p^2;$$
$$\boldsymbol{R}_2: \quad y = 1 + x/2,\ z = \lambda = 0,$$
$$\sigma = -\frac{2\xi^2 p^{-2}}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{(1-x)p^2}{2}, \tau = -\frac{p^2}{2};$$
$$\boldsymbol{R}_3: \quad x = y = 2, z = \lambda = 0,$$
$$\sigma = -\frac{2\xi^2 p^{-2}}{3} - \frac{p^2}{2}, \tau = -\frac{p^2}{2};$$
$$\boldsymbol{R}_5: \quad x = y, \lambda = z = 0, \sigma = \sigma_0 p^{2/3} + \sigma_2 p^2, \tau = \tau_0 p^{2/3};$$
$$\tau_0^3 = \frac{81y\xi^2}{y+2}, \frac{\sigma_0}{\tau_0} = -\frac{y+2}{3y^2}, \sigma_2 = \frac{1-y}{y},$$
$$\boldsymbol{R}_{15}: \quad x = \frac{8}{5}, y = \frac{9}{5},\ z = \lambda = 0,$$
$$\sigma = \frac{125}{288}\xi^2 p^{-2} - \frac{1}{18}p^2,\ \tau = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{88}{625\xi^2}p^6;$$
$$\boldsymbol{R}_{16}: \quad x = \frac{14}{9}, y = \frac{16}{9}, z = -\frac{11\tau_1^{-1}}{36}, \lambda = 0,$$
$$\sigma = -\frac{11}{1152}\tau_1^{-2} p^{-2} - \frac{11}{144}\tau_1^{-1} - \frac{p^2}{8}, \tau = -\frac{p^2}{2} - \tau_1 p^4.$$

Усі ці розв'язки комплексні. При цьому $\boldsymbol{R}_3 \subset \boldsymbol{R}_2$. Основним результатом є наступна теорема [22,23].

Теорема 7. *Рівняння Н. Ковалевського мають 16 сімей частинних розв'язків $\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_{16}$ і не допускають інших розв'язків, що є скінченними сумами раціональних степенів p.*

У восьмому розділі вивчено топологію спільних поверхонь рівнів перших інтегралів у задачі про рух важкого гіростата навколо нерухомої точки в окремому випадку, коли гіростатичний момент спрямований уздовж осі, що проходить через центр тяжіння гіростата. При такому припущенні осями рівномірних обертань тіла можуть бути тільки твірні прямі конуса Штауде.

Узагальненню результатів С.Б. Каток* присвячено пп. 8.1.5−8.1.7: класифіковано трипараметричну сім'ю біфуркаційних діаграм і у цілому вивчено топологію неособливих многовидів $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ у випадку, коли центр мас несиметричного гіростата знаходиться на головній осі інерції. Зокрема

---

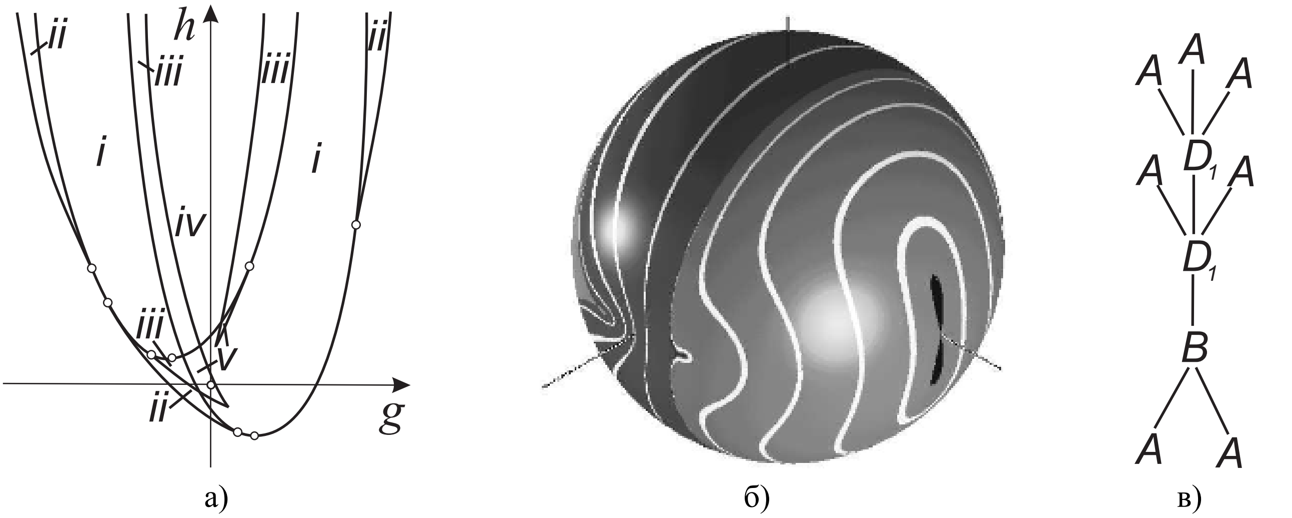
* Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела/ С.Б. Каток// Успехи мат. наук. – 1972. – **27**, вып. 2. – С. 126–132.

показано, що навіть при малій величині гіростатичного моменту $\boldsymbol{\lambda} = \chi \boldsymbol{r}$, $\chi \in \mathbf{R}$, існують не менш ніж 55 якісно різних видів невироджених біфуркаційних діаграм $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,g)$.

Теорема 8. *Нехай розподіл мас несиметричного гіростата задовольняє умовам* $\boldsymbol{r} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\lambda} = \chi \boldsymbol{r}$, *тоді при будь-якому фіксованому значенні інтеграла* G *ефективний потенціал* $U_g(\boldsymbol{\gamma})$ *має не менш двох, але не більш* n *критичних точок на сфері Пуассона, де*

- $n = 6$, *якщо* $A_2 > A_3 > A_1$;
- $n = 12$, *якщо* $A_2 > A_1 > A_3$ *або* $A_2 + A_3 \geq A_1 > A_2 > A_3$;
- $n = 18$, *якщо* $A_1 > A_2 + A_3 > A_2 > A_3$.

У п. 8.2 узагальнено результати, отримані в розділі 4. У задачі про рух важкого гіростата навколо нерухомої точки вивчено тривимірні алгебраїчні поверхні інтегральних рівнів та їх топологічні біфуркації, надано повний опис топології інтегральних многовидів, досліджено проекції цих многовидів на конфігураційний простір, встановлено топологічну структуру шарувань (рис. 2) на сфері Пуассона. У фазовому просторі побудовано двовимірну поверхню перетину Пуанкаре і класифіковано можливі форми цих поверхонь, що залежать від значень констант перших інтегралів.



а) б) в)

Рис. 2. Біфуркації інтегральних многовидів: а) біфуркаційна діаграма, б) лінії рівнів ефективного потенціалу $U_g(\boldsymbol{\gamma})$, в) молекулярна структура шарування.

У дев'ятому розділі розглянута задача про рух важкого гіростата, розподіл мас якого обмежен умовами Ковалевської. При одному додатковому обмеженні на параметри знайдено й аналітично досліджено двочастотну сім'ю розв'язків, що виражаються за допомогою еліптичних функцій часу. Без обмежень спільності вивчено структуру біфуркаційної множини. Якісний опис еволюції та перетворень торів Ліувілля на 3-многовидах $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}(\lambda)$ надано у термінах топологічних інваріантів А.Т. Фоменка*.

Для диференціальних рівнянь (1.3) в окремому випадку

$$A_1 = A_2 = 2A_3,\ \boldsymbol{r} = (1,0,0),\ \boldsymbol{\lambda} = (0,0,\lambda) \tag{9.1}$$

відомим є додатковий інтеграл (Х. Яхья, 1986 р.)

$$K = (v_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (v_2 + 2\omega_1\omega_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1 v_3] = k. \tag{9.2}$$

У п. 9.1 при параметричному обмеженні $P(a) = P'(a) = 0,$ де $P(a) = -a^4 + a^2(2h - \lambda^2) + 2ga + 1 - k,$ рівняння (1.3) та їх інтеграли (1.4), (9.2) приведено до системи

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = yz,\ \dot{y} = -xz - \gamma,\ \dot{z} = \beta, \dot{\alpha} = (2z - \lambda)\beta,\\
&\dot{\beta} = -(2z - \lambda)\alpha - a^2 z,\ \dot{\gamma} = y\alpha - x\beta,\\
&(\alpha + a^2)x + \beta y + \gamma(z - \lambda) = \frac{1}{2}a,\\
&\alpha - (z - \frac{1}{2}\lambda)^2 = \frac{1}{2}(a^2 - h), \quad \alpha^2 + \beta^2 + a^2 z^2 = \frac{1}{4},\\
&\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy - \gamma^2 + a^2 x^2 - \lambda z(x^2 + y^2) - 2\lambda x\gamma = \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Ці рівняння зведено до еліптичних квадратур

$$\dot{z} = \sqrt{f(z)}, \quad \Phi^2(z)(\dot{\eta})^2 + L_2 L_3 \eta^2 = L_1, \tag{9.4}$$

де

$$f(z) = \frac{1}{4} - a^2 z^2 - [(z - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - h)]^2, \quad \eta = y\Phi^{-\frac{1}{2}}(z),$$

$$\Phi(z) = (z - \lambda)^2 - L_2.$$

При інтегруванні та класифікації розв'язків рівнянь (9.4) доцільно розбити простір сталих параметрів гіростата на наступні підобласті:

$$1) L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 > 0; \quad 2) L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 < 0;$$

$$3) L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 > 0; \quad 4) L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 < 0;$$

$$5) L_1 < 0; \quad 6) L_1 = 0; \quad 7) L_2 = 0; \quad 8) L_3 = 0,$$

де

$$L_1 = \frac{1}{16}(2h - 2a^2 - \lambda^2),\ L_2 = \frac{1}{4}(2h - 6a^2 - \lambda^2),\ L_3 = 4(a^2 + \lambda^2)L_1 - \frac{1}{4}.$$

Доведено існування квазіперіодичних рухів при виконанні умов 1), 2) і асимптотичних рухів при умовах 3), 4), 7), 8). Отримано наочні формули для відповідних розв'язків системи (9.3).

---

* Bolsinov A.V. Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification/ A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. – Boca Raton etc.: Chapman & Hall/ CRC. – 2004. – 730p.

Топологічний аналіз розглянутого інтегровного випадку виконано у пп. 9.2, 9.3. Доведено, що критичні точки відображення:

$$J = H \times K \times G : \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times S^2(\boldsymbol{\nu}) \to \mathbf{R}^3(h,k,g)$$

відповідають двом сім'ям точних розв'язків П.В. Харламова:

$$\begin{aligned} 1) \qquad & (\omega_1 - c_0)^2 + \frac{c_1}{4}(\omega_3 - \lambda)^2 = c_2, \\ & \omega_1^2 + \frac{(c_1 - 1)}{c_1}\omega_2^2 + \frac{1}{4}(\omega_3 + \lambda)^2 = \frac{c_2}{c_1}, \\ & \nu_1 = \frac{4c_0(\omega_1 - c_0) + 2\lambda(\omega_3 - \lambda)}{1 - c_1} - \frac{4(\omega_1 - c_0)^2}{c_1}, \\ & \nu_2 = \frac{2}{c_1}\omega_2(c_0 - \omega_1), \quad \nu_3 = \frac{2\lambda\omega_1 - (\omega_3 + \lambda)c_0}{1 - c_1}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} 2) \qquad & \omega_2 = 0, \quad \nu_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - h, \\ & \nu_2^2 = 1 - (\omega_3 - \lambda)^2 p_0^2 - (p_0^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - h)^2, \\ & \nu_3 = -(\omega_3 - \lambda)p_0, \quad p_0 = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{9.6}$$

а біфуркаційну множину Σ відображення J вкладено в поверхні кратних коренів двох поліномів 4-й ступеня:

$$P(p) = P'(p) = 0, \tag{9.7}$$

$$Q(u) = Q'(u) = 0, \tag{9.8}$$

де $Q(u) = (u^2 - 2\lambda^2 h - k)^2 - 8\lambda^2 u + 4\lambda^2(g^2 - 2h - \lambda^2)$.

Зафіксуємо довільне значення параметра λ. У просторі констант інтегралів виділимо три зв'язних поверхні:

$$\Pi_1 = \{(h,k,g) : Q(u) = Q'(u) = 0, \ u > 0\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbf{R}^3(h,k,g),$$

$$\Pi_2 = \{(h,k,g) : Q(u) = Q'(u) = 0, \ u < 0\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbf{R}^3(h,k,g),$$

$$\Pi_3 = \{(h,k,g) : \ P(p) = P'(p) = 0, \ p \in \mathbf{R}\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbf{R}^3(h,k,g).$$

Теорема 9. *Біфуркаційна множина* $\Sigma_\lambda \subset \mathbf{R}^3(h,k,g)$ *є підмножиною об'єднання поверхонь* $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$, *заданих рівняннями (9.7), (9.8). Дійсні розв'язки рівнянь (9.5), (9.6) утворюють множину критичних точок на 2-многовиді* $J_{h,k,g}(\lambda) = \{H = h, K = k, G = g, I = 1\} \subset \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\nu})$

Теорема 10. *Обмеження динамічної системи (1.3),(1.4), що інтегрується при умові (9.1), має наступні властивості:*

а) неособливі ізоенергетичні поверхні $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ *дифеоморфні 3-многовидам* $\mathbf{R}P^3, S^3, S^1 \times S^2, N_2^3 = (S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$;

б) регулярні компоненти інтегральних 2-многовидів $J_{h,k,g}(\lambda)$ *дифеоморфні* T^2, $2T^2$, $4T^2$;

в) перетворення многовидів $J_{h,k,g}$, *які відбуваються в околі критичних шарів на* $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$, *описуються атомами* A, A^*, B, C_2;

г) можливі шарування Ліувілля неособливих ізоенергетичних поверхонь $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$ *представлені молекулами* $W_1 - W_7$, *табл. 3 містить повний реєстр пар* $(\boldsymbol{Q}^3_{h,g}, W_i)$.

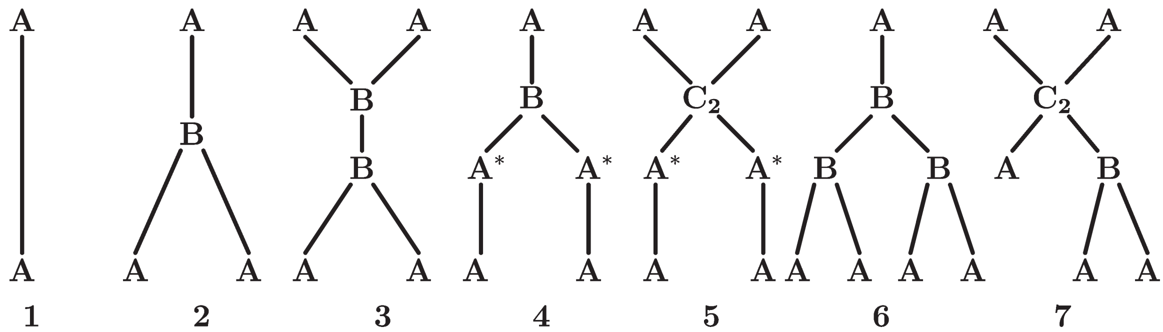


Рис. 3. Молекули $W_1 - W_7$ неособливих ізоенергетичних поверхонь $\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$.

Табл. 3. Шарування многовидів $(\boldsymbol{Q}^3_{h,g}, W_i)$.

$\boldsymbol{Q}^3_{h,g}$	Молекули W_i
$\mathbf{R}P^3$	W_3 W_4 W_5 W_6 W_7
S^3	W_1 W_2 W_3 W_6
$S^1 \times S^2$	W_2 W_3 W_6
$\#_2(S^1 \times S^2)$	W_6

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинуто топологічні і геометричні методи дослідження інваріантних многовидів механічних систем з алгебраїчними першими інтегралами. Вивчено якісне поводження фазових траєкторій як у інтегровних випадках, так і в загальній задачі про рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Здобуті результати поширено на більш загальну проблему − задачу про рух навколо нерухомої точки важкого гіростата з постійним гіростатичним моментом. Наступні результати дисертації є основними:

1. Здійснено ізоінтегральну редукцію рівнянь руху твердого тіла (у більш загальній постановці − гіростата) навколо нерухомої точки. Отримано нові форми диференціальних рівнянь руху у вигляді системи другого порядку, що істотно спрощує дослідження точних розв’язків з алгебраїчними інваріантними співвідношеннями.

2. У припущенні, що центр мас твердого тіла знаходиться в головній площині інерції, вивчено біфуркації спільних рівнів інтегралів енергії і моменту, надано повний опис топології інтегральних многовидів, досліджено проекції цих многовидів на конфігураційний простір, вказано топологічну структуру шарувань на сфері Пуассона. Проаналізовано трипараметричну сім'ю біфуркаційних діаграм і вивчено п'ятипараметричну сім'ю інтегральних многовидів. У результаті дослідження отримано 46 типів невироджених біфуркаційних діаграм і виявлено гладкий інтегральний 3-многовид $\boldsymbol{Q}^3_{h,g} = N^3_3$, невідомий раніше в цій задачі.

3. У загальній задачі про рух важкого гіростата впроваджено сім'ю глобальних нетрансверсальних перетинів Пуанкаре, досліджено їх властивості, топологію і біфуркації. Виявлені властивості фазових перетинів використано для класифікації проекцій інтегральних многовидів на рухомий простір кутових швидкостей. За допомогою створеної методики цілком вивчено множину припустимих швидкостей твердого тіла з нерухомою точкою.

4. Для класичного гіроскопа Ковалевської досліджено трипараметричну сім'ю сингулярних поверхонь − проекцій двовимірних інваріантних многовидів на рухомий простір кутових швидкостей. Надано класифікацію можливих типів цих поверхонь і визначено характерні якісні властивості рухомих годографів для всіх значень констант інтегралів, що відповідають невиродженим рухам гіроскопа Ковалевської. На основі детальної класифікації можливих форм годографів кутової швидкості запропоновано кінематичний опис квазіперіодичних рухів твердого тіла.

5. У інтегровному випадку, що узагальнив інтеграл Ковалевської на задачу про рух гіростата, знайдено біфуркаційну множину, у термінах топологічних інваріантів Фоменка описано еволюції і можливі перетворення торів Ліувілля на тривимірних ізоенергетичних поверхнях, аналітичними, чисельними і якісними методами досліджено асимптотичні рухи гіростата, при одному додатковому обмеженні на параметри механічної системи динамічні рівняння зведено до еліптичних квадратур.

6. Асимптотичний метод Ковалевської, методи й алгоритми степеневої геометрії використано для локального аналізу поводження розв'язків рівнянь Ейлера−Пуассона. Отримано необхідні умови існування розв'язків з алгебраїчними інваріантними співвідношеннями. Досліджено рівняння Н. Ковалевського, знайдено всі розв'язки цих рівнянь, зображувані скінченними сумами раціональних ступенів незалежної змінної.

7. Вивчено розщеплення сепаратрис для несиметричного тіла, що обертається навколо нерухомої точки в слабкому полі тяжіння. Досліджено якісні властивості асимптотично маятникових рухів твердого тіла в рухомому і нерухомому базисах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гашененко И.Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 1–10.
2. Гашененко И.Н. Новый класс движений тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 318, вып. 1. – С. 66–68.
3. Гашененко И.Н. Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 1–4.
4. Гашененко И.Н. Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 7–16.
5. Гашененко И.Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 31–35.
6. Гашененко И.Н. Бифуркационное множество в задаче о движении тяжелого гиростата при условиях Ковалевской/ И.Н. Гашененко// Доповіді НАН України. – 1997. – Вып. 2. – С. 60–62.
7. Гашененко И.Н. Подвижный годограф угловой скорости в решении С.В. Ковалевской/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1998. – Вып. 26(I). – С.1–9.
8. Гашененко И.Н. Изоэнергетическая поверхность в задаче о движении твердого тела/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1998. – Вып. 26(II). – С. 89–95.
9. Гашененко И.Н. О мероморфных решениях уравнений Эйлера–Пуассона/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28.– С. 1–8.
10. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 1–7.
11. Гашененко И.Н. Инвариантные множества в пространстве угловых скоростей тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 79–87.
12. Gashenenko I.N. Angular velocity of the Kovalevskaya top/ I.N. Gashenenko// Regular and chaotic dynamics. – 2000. – V. 5, № 1. – P. 104–113.
13. Гашененко И.Н. Анализ изоэнергетических поверхностей для точных решений задачи о движении твердого тела/ И.Н. Гашененко, Е.Ю. Кучер// Механика твердого тела.– 2001.– Вып. 31.– С. 18–30.

14.Гашененко И.Н. Огибающие поверхности в задаче о движении тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 39–49.

15.Гашененко И.Н. Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера–Пуассона/ И.Н. Гашененко, Е.Ю. Кучер// Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 50–59.

16.Гашененко И.Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 20–32.

17.Gashenenko I.N. Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies/ I.N. Gashenenko, P.H. Richter// Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2004. – V. 14, № 8. – P. 2525–2553.

18.Гашененко И.Н. Бифуркации уровней первых интегралов в задаче о движении тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 37–46.

19.Гашененко И.Н. Интегральные многообразия задачи о движении несимметричного гиростата/ И.Н. Гашененко// Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – Т. 10.– С. 24–31.

20.Гашененко И.Н. Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Нелинейная динамика. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 33–52.

21.Ковалев А.М. О хаотических движениях и расщеплении сепаратрис возмущенного движения Гесса/ А.М. Ковалев, И.Н. Гашененко, В.В. Кириченко// Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 19–30.

22.Брюно А.Д. Конечные решения уравнений Н. Ковалевского/ А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2005. – Вып.35. – С. 31–37.

23.Брюно А.Д. Простые точные решения уравнений Н. Ковалевского/ А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко// Доклады РАН. – 2006.– Т. 409, № 4. – С. 439–442.

24.Гашененко И.Н. Изоэнергетические поверхности в задаче о движении тела с неподвижной точкой/ И.Н. Гашененко// Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 3–12.

25.Гашененко И.Н. О редукции уравнений Эйлера–Пуассона/ И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова// Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 69–84.

26.Гашененко И.Н. Поверхности постоянной энергии в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой/ И.Н. Гашененко// Математика в индустрии: межд. конф., 29 июня–3 июля 1998 г.: сб. трудов. – Таганрог: ТГПИ, 1998. – С. 90–92.

27. Гашененко И.Н. Бифуркации интегральных многообразий задачи о движении гиростата Ковалевской/ И.Н. Гашененко// Устойчивость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 2-6 сент. 1996 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 1996. – С. 26–28.
28. Гашененко И.Н. Об инвариантных множествах в пространстве угловых скоростей твердого тела с неподвижной точкой/ И.Н. Гашененко// Устойчвость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 7-9 сент. 1999 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 1999. – С. 3.
29. Гашененко И.Н. Визуальное моделирование хаотической динамики тяжелого твердого тела/ И.Н. Гашененко, К.А. Ручкин, С.В. Лапенко// Укр. мат. конгресс: 21-23 авг. 2001 г.:тезисы докл. – Киев, 2001. – С. 14–15.
30. Гашененко И.Н. Асимптотический метод Ковалевской в динамике твердого тела/ И.Н. Гашененко// Устойчивость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 3-7 сент. 2002 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2002. – С. 62–63.
31. Гашененко И.Н. Огибающие поверхности и допустимые скорости тяжелого гиростата/ И.Н. Гашененко// Устойчивость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 3-7 сент. 2002 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2002. – С. 63.
32. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия уравнений Эйлера–Пуассона/ И.Н. Гашененко// 5-й межд. симпозиум по классической и небесной механике, 23-28 авг. 2004 г.: тезисы докл. – В. Луки: ВЦ РАН, 2004. – С. 62–63.
33. Гашененко И.Н. Структура интегральных многообразий задачи о движении тела с неподвижной точкой/ И.Н. Гашененко// Классические задачи динамики твердого тела: межд. конф., 23-25 июня 2004 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2004. – С. 6.
34. Гашененко И.Н. Компьютерная реализация метода фазовых сечений в задаче о движении тела с неподвижной точкой/ И.Н. Гашененко, К.А. Ручкин// Устойчивость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 1-6 сент. 2005 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2005. – С. 5–6.
35. Брюно А.Д. Конечные решения уравнений Н. Ковалевского/ А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко// Устойчивость, управление и динамика твердого тела: межд. конф., 1-6 сент. 2005 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2005. – С. 72–73.
36. Гашененко И.Н. Об уравнениях движения твердого тела вокруг неподвижной точки/ И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова// Классичес-

кие задачи динамики твердого тела: межд. конф., 9-13 июня 2007 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2007. – С. 18–19.

37. Gashenenko I.N. The study of non-integrable rigid body problems/ I.N. Gashenenko, P.H. Richter, S. Schmidt// Классические задачи динамики твердого тела: межд. конф., 23-25 июня 2004 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2004. – С. 6–7.
38. Gashenenko I.N. Finite solutions of the N. Kowalewski equations for motion of a rigid body about a fixed point/ I.N. Gashenenko// 12th Int. Conf. on Applications of Computer Algebra: 26-29 June 2006, Abstracts of Presentations. – Varna, Bulgaria, 2006. – P. 51.
39. Gashenenko I.N. Iso-energy manifolds and enveloping surfaces in the problem of rigid body motions/ I.N. Gashenenko, P.H. Richter// Классические задачи динамики твердого тела: межд. конф., 9-13 июня 2007 г.: тезисы докл.– Донецк: ИПММ НАНУ, 2007. – С. 90–91.
40. Харламов П.В. Двухчастотные маятниковые движения гироскопов Чаплыгина и Ковалевской/ П.В. Харламов, И.Н. Гашененко// Всесоюз. конф. по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике: тезисы докл. – М., 1988. – Деп. в ВИНИТИ №8886-В-88.
41. Брюно А.Д. Последние разложения модифицированных движений твердого тела/ А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко. – М., 2005. – 13 с. – (Препринт/ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №65).
42. Брюно А.Д. Простые конечные решения уравнений Н. Ковалевского/ А.Д. Брюно, И.Н. Гашененко. – М., 2005. – 32 с. – (Препринт/ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №68).

АНОТАЦІЇ

Гашененко І.М. Інваріантні многовиди і множини припустимих швидкостей в задачах динаміки твердого тіла. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2008.

В дисертаційній роботі проведено систематичне дослідження інваріантних многовидів інтегровних та неінтегровних задач динаміки твердого тіла, розвинуто топологічні та геометричні методи дослідження інваріантних многовидів механічних систем з алгебраїчними інтегралами. Отримано нові

форми диференціальних рівнянь руху твердого тіла і гіростата у вигляді системи другого порядку. Для системи Н. Ковалевського методами степеневої геометрії здобуто повний реєстр (з 16 сімей) точних розв'язків, зображуваних скінченними сумами раціональних степенів незалежної змінної.

Запропоновано новий метод дослідження та класифікації інтегральних 3-многовидів задач про рух твердого тіла і гіростата. У припущенні, що центр мас твердого тіла знаходиться в головній площині інерції, вивчено біфуркації спільних рівнів інтегралів енергії і моменту, надано повний опис топології інтегральних многовидів, досліджено проекції цих многовидів на конфігураційний простір, встановлено топологічну структуру шарувань на сфері Пуассона.

У загальній задачі про рух важкого гіростата впроваджено сім'ю глобальних перетинів Пуанкаре, досліджено їх властивості, топологію і біфуркації. Виявлені властивості фазових перетинів використано для класифікації проекцій інтегральних многовидів на рухомий простір кутових швидкостей. За допомогою створеної методики вивчено множину припустимих швидкостей твердого тіла з нерухомою точкою.

Ключові слова: динаміка твердого тіла, гіростат, інтегральні многовиди, біфуркаційна множина, кутова швидкість, рівномірні обертання, фазовий перетин Пуанкаре, степенева геометрія.

Гашененко И.Н. Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в задачах динамики твердого тела. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 2008.

Диссертационная работа посвящена детальному и систематическому изучению инвариантных многообразий интегрируемых и неинтегрируемых задач динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Основная цель проведенных исследований – создание эффективных методов изучения инвариантных многообразий механических систем, качественное и количественное описание на их основе движения твердого тела вокруг неподвижной точки как в общей постановке, так и в известных случаях интегрируемости. Применяемые методы исследования базируются на аналитических и качественных методах теории дифференциальных уравнений, методе Смейла топологического изучения интегральных многообразий механических систем с симметрией, методе фазовых сечений Пуанкаре, методах вычисления топологических инвариантов интегрируемых

гамильтоновых систем, методе годографов угловой скорости кинематического представления движения, методах и алгоритмах степенной геометрии.

Получены новые формы дифференциальных уравнений движения твердого тела и гиростата в виде системы второго порядка, существенно упрощающие исследование решений, описываемых алгебраическими инвариантными соотношениями. Для системы дифференциальных уравнений Н. Ковалевского получен полный список (из 16 семейств) точных решений, представимых конечными суммами рациональных степеней независимой переменной. Проанализированы условия действительности этих решений.

Предложен новый метод изучения и классификации трехмерных интегральных многообразий задачи о движении тяжелого твердого тела и гиростата. Полностью изучен случай, когда центр масс тела находится в главной плоскости эллипсоида инерции. В пространстве параметров указана область существования гладкого компактного интегрального 3-многообразия рода 4, неизвестного ранее в этой задаче.

Получено уравнение огибающей поверхности, ограничивающей в подвижном базисе область допустимых скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Исследована топология огибающей поверхности, ее зависимость от конструктивных параметров и констант первых интегралов. Указаны фундаментальные свойства подвижных годографов угловой скорости. Исследованы качественные свойства асимптотически маятниковых движений твердого тела в подвижном и неподвижном базисах.

В общей задаче о движении тяжелого гиростата введено семейство нетрансверсальных сечений Пуанкаре, предложен новый метод формирования глобальных фазовых сечений динамических систем.

В интегрируемом случае С.В. Ковалевской изучено трехпараметрическое семейство сингулярных поверхностей – проекций интегральных многообразий на подвижное пространство угловых скоростей. Обобщены результаты Н.Е. Жуковского и Г.Г. Аппельрота, дана полная классификация возможных типов этих поверхностей и указаны характерные свойства подвижных годографов для допустимых значений констант интегралов. В задаче о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской, в терминах топологических инвариантов А.Т. Фоменко дано полное качественное описание эволюции и перестроек торов Лиувилля на интегральных 3-многообразиях. Найдены семейства асимптотических и квазипериодических движений гиростата Ковалевской: уравнения движения сведены к эллиптическим квадратурам, выполнена параметрическая классификация движений.

Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут быть использованы в аналитической и прикладной механике, в теории гамильтоновых систем.

Ключевые слова: динамика твердого тела, гиростат, интегральные многообразия, бифуркационное множество, угловая скорость, равномерные вращения, фазовое сечение Пуанкаре, степенная геометрия.

Gashenenko I.N. Invariant manifolds and admissible-velocity sets in the problems of rigid body dynamics. – Manuscript.

Thesis for a doctor's degree (physical and mathematical sciences) by the speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 2008.

This dissertation is devoted to a detailed and systematic study of invariant manifolds of integrable as well as of nonintegrable problems of the dynamics of a rigid body. The main goal of our investigations is to elaborate effective methods for studying invariant manifolds of mechanical systems, and to use these methods in order to give a qualitative and quantitative description of the motion of a rigid body about a fixed point in a general setting as well as in known cases of integrability.

We obtain new forms of the equations of motion of a rigid body and of a gyrostat as systems of second order, which simplify the search for and the investigation of solutions described by algebraic invariant relations. For the system of differential equations of N. Kowalewski we obtain a complete list of exact, i.e., closed-form solutions, consisting of 16 families, which are expressed as finite sums of rational powers of the independent variable.

We propose a new method for studying and classifying integral three-dimensional manifolds of the problems of motion of a rigid body and of a gyrostat. We obtain the equation of the enveloping surface which bounds, in a moving reference frame, the domain of admissible velocities of a rigid body that rotates around a fixed point. We study the topology of this enveloping surface, its dependence on the body parameters and on the constant values of the first integrals. We indicate the main properties of moving hodographs of the angular velocity.

In the general problem of the motion of a gyrostat we introduce a family of nontransversal Poincaré sections and propose a new method for constructing global surfaces of section in the phase space of dynamical systems.

In the Kovalevskaya case of integrability we study a three-parameter family of singular surfaces, namely, the projections of the integral manifolds on the moving angular-velocity space. In the problem of the motion of a gyrostat obeying the Kovalevskaya conditions, we give a complete qualitative description of the evolution and bifurcations of the Liouville tori on the three-dimensional integral manifolds in terms of Fomenko's topological invariants. We find families of asymptotic and quasiperiodic motions of the Kovalevskaya gyrostat: the equations of motions are reduced to elliptic quadratures and a parametric classification of motions is carried out.

Key words: dynamics of a rigid body, gyrostat, integral manifolds, bifurcation set, angular velocity, steady rotations, Poincaré section, power geometry.