8. *Харламов А.П., Кравчук Д.Н.* , Движение гироскопа А.И.Дошкевича // Там же. – Вып. 15. – 1983. – С. 35–39.
9. *Харламов А.П., Харламов М.П.* , Неголономный шарнир // См. наст. сб.
10. *Харламов М.П.* , О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела.– Вып. 13. – 1981. – С. 10–14.
11. *Харламов П.В.* , Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск : Изд–во Новосиб. ун–та, 1965. – 221 с.
12. *Харламов П.В.* , Гиростат с неголономной связью // Механика твердого тела.– Вып. 3. – 1971. – С. 120–130.
13. *Харламов П.В., Харламова Е.И.* , Одно решение задачи о движении гироскопа, подчиненного неголономной связи // Там же. – С. 132–136.
14. *Харламова Е.И.* , Движение по инерции гиростата, подчиненного неголономной связи // Там же. – С. 130–132.
15. *Харламова–Забелина Е.И.* , Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // Вест. Моск. ун–та. Математика, механика.– 1957. – *N 6.* – С. 26–34.

Донецкий физ.–техн. ин–т НАН Украины Получено 26.06.93

УДК 531.38

©1995. **И.Н. Гашененко**

БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА, ПОДЧИНЕННОГО УСЛОВИЯМ КОВАЛЕВСКОЙ

В интегрируемом случае движения тяжелого гиростата [7], обобщившем решение С.В. Ковалевской [3], изучена структура бифуркационного множества в пространстве констант первых интегралов.

Пусть главные моменты инерции гиростата удовлетворяют соотношениям $A = B = 2C$, центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции и гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Тогда уравнения движения гиростата в поле силы тяжести имеют следующие интегралы [7]:

$$\begin{aligned}
F_1 &= p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 = h, \\
F_2 &= (p^2 - q^2 + \nu_1)^2 + (2pq + \nu_2)^2 + 2\lambda[(r-\lambda)(p^2+q^2) + 2p\nu_3] = k, \\
F_3 &= 2(p\nu_1 + q\nu_2) + (r+\lambda)\nu_3 = l, \\
F_4 &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использованы безразмерные переменные [1],постоянная λ характеризует величину гиростатического момента. Без ограничения общности примем $\lambda > 0$. Исследование бифуркационного множества в интегрируемом случае Ковалевской $(\lambda = 0)$ выполнено в работе [5].

Зафиксируем произвольное значение постоянной λ . Двумерная поверхность уровня первых интегралов

$$J_{h,k,l}(\lambda) = \{F_1 = h, F_2 = k, F_3 = l, F_4 = 1\} \subset R^6$$

инвариантна относительно двух независимых коммутирующих векторных полей с гамильтонианами F_1, F_2 . По теореме Лиувилля неособая компактная поверхность $J_{h,k,l}$ является объединением двумерных торов, заполненных условно–периодическими траекториями. Критические поверхности $J_{h,k,l}$ отвечают тем значениям (h,k,l) , которые принадлежат бифуркационному множеству $\Sigma_\lambda \subset R^3(h,k,l)$. Они несут все особые движения и определяют характер топологических перестроек торов Лиувилля, происходящих при изменении (h,k,l). На критических поверхностях $J_{h,k,l}$ всегда имеются точки R^6 , в которых интегралы (1) зависимы. Подмножество критических точек найдем из следующего условия на ранг матрицы Якоби :

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \nu_3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_4}{\partial p} & \dots & \frac{\partial F_4}{\partial \nu_3} \end{Vmatrix} < 4. \tag{2}$$

Отдельно рассмотрим особый случай, полагая в соотношениях (1)

$$q = 0. \tag{3}$$

Тогда из (2) находим дополнительные ограничения на переменные:

$$(r-\lambda)p + \nu_3 = 0, \tag{4}$$

$$\nu_2 = \frac{\partial(F_1,F_2,F_3,F_4)}{\partial(p,r,\nu_1,\nu_3)} = 0. \tag{5}$$

При одновременном выполнении равенств (3) , (4) или (3) , (5) условие (2) удовлетворяется. Это следует, например , из результатов работы [4]. Подстановкой (3), (4) в (1) находим, что полином $P(p) = -p^4 + (2h-\lambda^2)p^2 + 2lp + 1 - k$ имеет кратный корень:

$$P(p) = P'(p) = 0. \tag{6}$$

Этот случай подробно исследован в работах [1],[2]: уравнения движения сведены к эллиптическим квадратурам, классифицированы возможные типы движений гиростата, выделены значения h,k,l,λ , отвечающие вырожденным движениям.

Из соотношений (1),(3),(5) следует , что величина $u = p^2 + \lambda r + \nu_1$ является кратным корнем полинома $Q(u) = (u^2 - 2\lambda^2 h - k)^2 - 8\lambda^2 u + 4\lambda^2(l^2 - 2h - \lambda^2)$:

$$Q(u) = Q'(u) = 0. \tag{7}$$

В работе [7] отмечалось, что интегралам (1) удовлетворяет частное решение, указанное П.В.Харламовым [6]. Из дальнейшего следует, что для этого частного решения постоянные h,k,l,λ связаны соотношениями (7).

Итак , рассмотрены критические точки , удовлетворяющие условию (3) , т. е. принадлежащие одному сечению фазового пространства. Однако , некоторые критические поверхности $J_{h,k,l}$ не имеют критических точек, удовлетворяющих (3). Поэтому рассмотрим случай, когда

$$q \neq 0. \tag{8}$$

Введем комплексные переменные

$$x_{1,2} = p \pm iq, \quad y_{1,2} = (p \pm iq)^2 + \nu_1 \pm i\nu_2, \quad z_{1,2} = (r-\lambda)(p \pm iq) + \nu_3 \tag{9}$$

и обозначим

$$R(x_1,x_2) = -x_1^2x_2^2 + (2h-\lambda^2)x_1x_2 + l(x_1+x_2) + 1 - k,$$

$$P(x) = R(x,x).$$

Невырожденное координатное преобразование (9) позволяет неявно определить интегралы (1) следующей системой уравнений :

$$
\begin{aligned}
&f_1 = z_1z_2 - R(x_1,x_2) = 0,\\
&f_2 = z_1^2 - 2\lambda(x_2-x_1)z_1 - y_1(x_2-x_1)^2 - P(x_1) = 0,\\
&f_3 = z_2^2 + 2\lambda(x_2-x_1)z_2 - y_2(x_2-x_1)^2 - P(x_2) = 0,\\
&f_4 = (y_1y_2-k)(x_2-x_1) + 2\lambda(x_2^2z_1 - x_1^2z_2) = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Составим матрицу Якоби функций f_i по переменным $(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)$. Если ранг этой матрицы меньше четырех (см. условие (2)), тогда имеем

$$
\begin{cases}
y_1z_2 + \lambda(x_1-x_2)(x_1^2-y_1) = \sigma z_1,\\
y_2z_1 + \lambda(x_2-x_1)(x_2^2-y_2) = \sigma z_2,\\
(k+3y_1y_2-4\lambda x_1z_2)(x_1-x_2) + 2\lambda(z_2y_1-z_1y_2) + y_2P'(x_1) = 2\sigma\dfrac{\partial R}{\partial x_1},\\
(k+3y_1y_2-4\lambda x_2z_1)(x_2-x_1) + 2\lambda(z_1y_2-z_2y_1) + y_1P'(x_2) = 2\sigma\dfrac{\partial R}{\partial x_2},
\end{cases}
\tag{11}
$$

где σ – неопределенный множитель. Запишем (11) в действительной форме , предварительно исключив интегральные постоянные с помощью уравнений (10):

$$
\begin{cases}
(\sigma-\eta_1)a_1 - \eta_2a_2 - 2\lambda qa_4 = 0,\\
\eta_2a_1 - (\sigma+\eta_1+2\lambda^2)a_2 - 2\lambda qa_3 = 0,\\
2\lambda qa_2 + (\sigma-\eta_1)a_3 - \eta_2a_4 = 0,\\
2\lambda qa_1 - \eta_2a_3 + (\sigma+\eta_1+2\lambda^2)a_4 = 0,
\end{cases}
\tag{12}
$$

где

$$
a_1 = \nu_3 + (r-\lambda)p, \quad a_2 = (r-\lambda)q, \quad a_3 = \nu_1 - \lambda(r-\lambda), \quad a_4 = \nu_2,
$$

$$
\eta_1 = \nu_1 + p^2 - q^2, \quad \eta_2 = \nu_2 + 2pq.
$$

Величины a_i одновременно в нуль не обращаются при $q \neq 0$, поэтому из (12) находим

$$
(\sigma+\lambda^2)^2 = (\eta_1+\lambda^2)^2 + \eta_2^2 + 4\lambda^2q^2. \tag{13}
$$

Таким образом, действительный множитель σ в соотношениях (11) удовлетворяет уравнению (13). В частности, при $\lambda = 0$ имеем $\sigma^2 = k$. Из (12) получим

$$
\begin{aligned}
&\sigma + \lambda^2 = \lambda q(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)/d,\\
&\eta_1 + \lambda^2 = \lambda q(a_1^2 + a_3^2 - a_2^2 - a_4^2)/d,\\
&\eta_2 = 2\lambda q(a_1a_2 + a_3a_4)/d,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $d = a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0$. Вместе с (1), два последних соотношения (14) определяют множество критических точек на поверхностях $J_{h,k,l}(\lambda)$. Введем новую переменную $u = \sigma + \lambda r$, которая зависит только от постоянных h,k,l,λ . Действительно, из (1),(8),(14) следует, что u является кратным корнем полинома $Q(u)$. Обозначим постоянные

$$
c_0 = ul, \quad c_1 = 1 + (2u+2h+\lambda^2)u, \quad c_2 = \frac{c_1}{4}(2u+2h+\lambda^2),
$$

тогда непосредственно из (1),(14) находим

$$
\begin{aligned}
&(p-c_0)^2+\frac{c_1}{4}(r-\lambda)^2=c_2,\\
&p^2+\frac{(c_1-1)}{c_1}q^2+\frac{1}{4}(r+\lambda)^2=\frac{c_2}{c_1},\\
&\nu_1=\frac{4c_0(p-c_0)+2\lambda(r-\lambda)}{1-c_1}-\frac{4(p-c_0)^2}{c_1},\\
&\nu_2=\frac{2}{c_1}q(c_0-p),\quad \nu_3=\frac{2\lambda p-(r+\lambda)c_0}{1-c_1}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Соотношениям (15) удовлетворяют критические точки R^6 , в которых интегралы (1) зависимы. С другой стороны, инвариантные соотношения (15) определяют решение П.В.Харламова [6]. В бифуркационное множество Σ_λ входит лишь та часть поверхности (7), которая отвечает действительным решениям системы (15).

Напомним, что условия (2), (6) приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&q=0,\quad \nu_1=p_0^2+\frac{1}{2}r^2-h,\\
&\nu_2^2=1-(r-\lambda)^2p_0^2-(p_0^2+\frac{1}{2}r^2-h)^2,\\
&\nu_3=-(r-\lambda)p_0,\quad p_0=\mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема . Бифуркационное множество $\Sigma_\lambda\subset R^3(h,k,l)$ является подмножеством объединения поверхностей, задаваемых уравнениями (6), (7). Действительные решения уравнений (15), (16) образуют множество критических точек на $J_{h,k,l}(\lambda)$.

При любом фиксированном значении λ множество Σ_λ делит $R^3(h,k,l)$ на области, внутри которых топологический тип $J_{h,k,l}$ не меняется. В точках бифуркационного множества критические поверхности $J_{h,k,l}$ имеют различное строение. Например, отдельные связные компоненты $J_{h,k,l}$ могут быть обычными торами Лиувилля, окружностями (15), (16) либо двумерными самопересекающимися поверхностями, содержащими критические окружности (15), (16). Уравнения (6), (7) позволяют изучить геометрические свойства множества Σ_λ и найти на нем разделяющие кривые, посредством которых осуществляется топологическая классификация критических интегральных поверхностей $J_{h,k,l}$.

Множество Σ_λ в $R^3(h,k,l)$ состоит из трех компонент: поверхности (6) и двух непересекающихся компонент поверхности (7), отвечающих неравенствам $u<0, u>0$. Найдем множество точек $(h,k,l)\in R^3(h,k,l)$, одновременно удовлетворяющих условиям (6),(7). Из таких точек состоят кривые, в которых происходит касание либо пересечение различных связных компонент множества Σ_λ. Соотношения

$$
\begin{aligned}
&h=(2r-\lambda)\mu-\frac{r}{2}(r-\lambda),\\
&k=\lambda(\mu-\frac{r}{2})(\lambda\mu+\frac{3}{2}\lambda r-2r^2),\\
&l^2=4r(\mu-\frac{r}{2})(r-\lambda)^2(\mu+\frac{\lambda}{2})^2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $\mu^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{1}{(r-\lambda)^2}$, $\mathrm{sign}(\mu) = \mathrm{sign}(r)$, $r \in (-\infty, 0) \cup (0, \lambda) \cup (\lambda, \infty)$ определяют искомую кривую в $R^3(h,k,l)$. Равенства (6),(7) выполняются и для точек кривой

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2u} - u - \frac{\lambda^2}{2}, \\ k &= (u+\lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2}{u}, \\ l^2 &= -\frac{(u+\lambda^2)}{u^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $u \leqslant -\lambda^2$.

Координаты поверхности (6) подчиним условию $P''(p) = 0$ и определим h, k, l как функции параметра p. Полученные параметрические уравнения

$$h = 3p^2 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad k = 1 - 3p^4, \quad l = -4p^3 \tag{19}$$

определяют действительную кривую (ребро возврата поверхности (6)). Одна из компонент поверхности (7) содержит кривую с координатами, удовлетворяющими уравнениям $Q(u) = Q'(u) = Q''(u) = 0$. Из этих соотношений следуют уравнения ребра возврата:

$$2h - l^2 + \lambda^2 - 3\lambda^{\frac{2}{3}} = 0, \quad k + 2h\lambda^2 - 3\lambda^{\frac{4}{3}} = 0. \tag{20}$$

Еще одна особая кривая поверхности (6) соответствует паре кратных корней полинома $P(p)$:

$$(h - \frac{\lambda^2}{2})^2 + 1 = k, \quad l = 0. \tag{21}$$

Итак, кривые (17)-(21) разбивают Σ_λ на подобласти с различными типами критических поверхностей $J_{h,k,l}$. В точках, принадлежащих кривым (17)-(21), зависимость основных переменных от времени имеет наиболее простой вид.

Заметим, что уравнения разделяющих кривых (17)–(19), (21) также следуют из результатов работы [1] , в которой классифицированы все вырожденные движения гиростата при условиях (6).

1. *Гашененко И.Н.* , Новый класс движений тяжелого гиростата // Докл. АН СССР. – 1991. – Т.318.– Вып.1. – С. 66–68.
2. *Гашененко И.Н.* , Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 1992. – Вып.24. – С. 1–4.
3. *Ковалевская С.В.* , Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. – М.: Изд–во АН СССР. – 1948. – С. 153–220.
4. *Рябов П.Е.* , Некоторые случаи вырождения переменных в одной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // М., 1991. – 9с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, 3660. – В91 Деп..
5. *Харламов М.П.* , Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и мех. – 1983. – Т.47. – Вып.6. – С. 922–930.
6. *Харламов П.В.* , Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1971. – Вып.3. – С. 57–64.
7. *Яхья Х.М.* , Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун–та. – Сер.1. – 1987. – Вып.4. – С. 88–90.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 05.10.95