

УДК 51-74 : 669.147

В. Н. Ткаченко, д-р техн. наук,

А. А. Иванова, инженер

Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины
(Украина, 83114, Донецк, ул. Р. Люксембург, 74,
тел. (062)3110436, E-mail: ivanova@iamm.ac.donetsk.ua)

Моделирование и анализ теплового поля непрерывного слитка криволинейной МНЛЗ.

Предложена математическая модель нестационарного теплового процесса непрерывного слитка криволинейной МНЛЗ, разработаны явные схемы конечно-разностной аппроксимации и алгоритм решения поставленной задачи, проведён анализ полученных численных результатов.

Ключевые слова: криволинейная МНЛЗ, тепловое поле, граница раздела фаз, метод конечных разностей, параметрическая чувствительность.

Правильно выбранный температурный режим является одним из основных факторов стабильности качества продукции технологического процесса непрерывной разливки стали. Его нарушения часто приводят к полной потере плавки или массовому браку в слитках, а иногда и к серьёзным авариям на машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Таким образом, при непрерывной разливке требования к температурному режиму должны быть значительно более жёсткими, чем при обычной разливке [1,2].

Тепловые процессы в непрерывном слитке на каждом участке МНЛЗ весьма сложны. Математические модели, описывающие их, основаны на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных и граничных условиях различного рода. Поэтому такие задачи не поддаются аналитическому решению. Кроме того, аналитический подход ограничен простотой геометрических конфигураций рассматриваемой области. Экспериментальный метод в решении задач, возникающих при изучении процессов непрерывной разливки, требует колоссальных денежных затрат, сложнейшего оборудования, решения вопросов моделирования реальных условий и пр.

Современное развитие численных методов и ЭВМ делает численный подход наиболее привлекательным в решении задач моделирования и исследования тепловых процессов непрерывной разливки стали. К тому же он не имеет ограничений связанных с нелинейностью, которые обычно возникают при попытках аналитических решений. Постоянно растущая мощность вычислительной техники дает возможность постановок все более полных и сложных задач моделирования технологического процесса непрерывной разливки стали.

Математическое моделирование позволяет оптимизировать рабочие параметры непрерывной разливки, повысить качество разливаемой заготовки, снизить производственные затраты и обеспечить безаварийную работу МНЛЗ.

Математическая модель.

При построении математической модели приняты следующие упрощающие допущения:

1. Тепловой поток в направлении перпендикулярном плоскости Oxz пренебрежимо мал. Так поступают в случаях, когда в слитках прямоугольного сечения широкая грань хотя бы вдвое больше узкой.
2. Распределение температур в кристаллизаторе симметрично относительно оси Oz .
3. Считается, что жидкая и твёрдая фазы разделены чёткой границей (линией), а не полосой, а температура затвердевания средняя из интервала ликвидус – солидус.
4. Перемешивание в жидкой фазе не учитывается.
5. В случае, когда разливка проводится не под шлаком, учитываются потери тепла от зеркала расплава только за счёт излучения, поскольку конвекция играет незначительную роль [2].
6. Ширина слитка на любом уровне МНЛЗ – величина постоянная.
7. Кристаллизатор – недеформируемое тело.
8. Не учитываются возвратно-поступательное движение кристаллизатора и трение между поверхностями слитка и кристаллизатора.
9. В связи с тем, что между поверхностью слитка в кристаллизаторе и стенкой кристаллизатора всегда существует некоторый зазор, обусловленный шероховатостями поверхностей и усадкой слитка, в рассмотрение вводится эффективная толщина газового зазора δ_3 между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора [2].
10. Тепловой поток в конце прямолинейного участка ЗВО считается равным нулю.

где C_n – приведённый коэффициент излучения, Вт/(м²К⁴); $T|_{z=0}$ – температура излучающей жидкой стали; $T_{окр.ср.4}$ – температура окружающей среды.

При разливке под шлаком тепловой поток от зеркала расплава можно считать равным нулю.

Остальные граничные условия для части слитка внутри кристаллизатора:

при $x = 0$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

при $x = l$

$$\lambda(T, z) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{\lambda_{Г.3}}{\delta_3} (T|_{x=l+\delta_3} - T|_{x=l}) + C_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta_3}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], 0 < z \leq Z, \quad (4)$$

где $\lambda_{Г.3}$ – коэффициент теплопроводности газовой смеси в зазоре; $T|_{x=l}$, $T|_{x=l+\delta_3}$ – температура поверхностей слитка и кристаллизатора соответственно; δ_3 – толщина газового зазора, C_n – приведённый коэффициент излучения.

Условия на границе раздела фаз:

– условие равенства температур

$$T(\tau, x, z)|_{x=\xi_-(\tau, z)} = T(\tau, x, z)|_{x=\xi_+(\tau, z)} = T_{кр}, \quad (5)$$

– уравнение, описывающее движение неизвестной границы между жидкой и твердой фазами металла (условие Стефана)

$$\lambda(T, x, z) \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=\xi_-(\tau, z)} - \lambda(T, x, z) \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=\xi_+(\tau, z)} = \mu \rho(T_{кр}) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), 0 \leq z \leq Z, \quad (6)$$

где ξ – граница раздела фаз есть функция двух переменных $x = \xi(\tau, z)$, μ – скрытая теплота кристаллизации, (Дж/кг); $T_{кр}$ – температура кристаллизации (средняя из интервала ликвидус – солидус), \bar{n} – нормаль к поверхности раздела фаз.

Начальное положение границы раздела фаз

$$\xi(0, z) = \xi_0(z) \quad (7)$$

и «граничное» условие для функции ξ :

$$\xi(\tau, 0) = l \quad (8)$$

Уравнение теплопроводности для стенки кристаллизатора:

$$\frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{c(T, x, z) \rho(T, x, z)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$z_0 < z < Z, l < x < d$$

Граничные условия для стенки кристаллизатора:

$$\begin{aligned}
 \text{при } x = d \quad \lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d} &= \alpha_1 (T_\theta - T|_{x=d}), \quad z_0 < z < Z, \\
 \text{при } z = Z \quad \lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z} &= \alpha_2 (T_{\text{окр.ср.2}} - T|_{z=Z}), \quad l < x < d, \\
 \text{при } z = z_0 \quad -\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} &= \alpha_3 (T_{\text{окр.ср.3}} - T|_{z=z_0}), \quad l < x < d, \quad (10)
 \end{aligned}$$

при $x = l + \delta_3$ ниже уровня мениска

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta_3} = \frac{\lambda_{г.3}}{\delta_3} (T|_{x=l+\delta_3} - T|_{x=l}) + C_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta_3}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad 0 < z \leq Z$$

при $x = l + \delta_3$ (над мениском)

$$-\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta_3} = \alpha_4 (T_{\text{окр.ср.1}} - T|_{x=d}) + C_n \left[\left(\frac{T_{\text{окр.ср.1}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=d}}{100} \right)^4 \right], \quad z_0 < z < 0,$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, Вт/(м²·К); T_θ – температура охлаждающей воды, $\alpha_{2,3,4}$ – коэффициенты теплоотдачи от стенки кристаллизатора в окружающую среду, $T_{\text{окр.ср.2,3,4}}$ – температура окружающей среды.

Температура охлаждающей воды в канале кристаллизатора описывается следующим балансовым уравнением:

$$c_\theta S_\theta v_\theta \frac{\partial T_\theta(\tau, z)}{\partial z} = P_c \alpha_1 (T_\theta(\tau, z) - T|_{x=d}) - P_{\text{вн}} \alpha_{\text{вн}} (T_\theta(\tau, z) - T_{\text{вн}}), \quad (11)$$

где c_θ – объёмная теплоёмкость воды, Дж/(К·м³); S_θ – сечение для прохода воды, м²; v_θ – скорость воды, м/сек; P_c – периметр стенки кристаллизатора, м; $P_{\text{вн}}$ – периметр внешней стенки; $\alpha_{\text{вн}}$ – коэффициент теплоотдачи от воды к внешней стенке, $T_{\text{вн}}$ – температура внешней стенки.

Известна температура охлаждающей воды на входе в канал кристаллизатора:

$$T_\theta(0, Z) = T_{\theta\theta}(\tau) \quad (12)$$

и её начальное распределение внутри канала:

$$T_\theta(0, z) = T_{\theta 0}(z) \quad (13)$$

Теплообмен в зоне вторичного охлаждения (ЗВО)

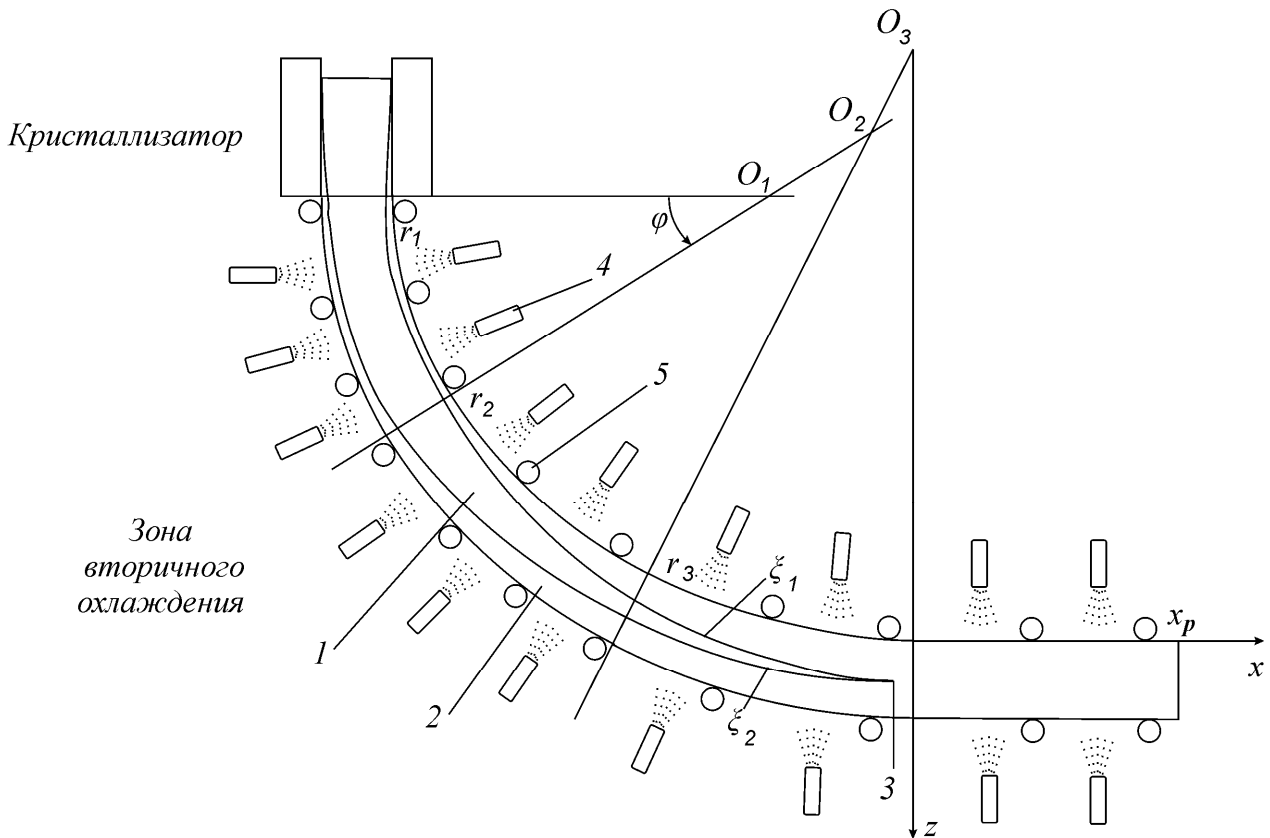


Рисунок 2. Тепловая схема ЗВО. 1 – жидкая фаза; 2 – твёрдая фаза; 3 – точка окончательной кристаллизации (глубина жидкой фазы); 4 – форсунки, подающие водо-воздушную смесь; 5 – ролики.

Уравнение тепломассопереноса для слитка на криволинейных участках МНЛЗ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \theta_m(\tau) \frac{\partial T(\tau, r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{c(T, r, \varphi) \rho(T, r, \varphi)} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\lambda(T, r, \varphi)}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \quad (14)$$

где θ_m – угловая скорость движения слитка на m -м криволинейном участке.

Условия равенства температур на границе раздела фаз:

$$T(\tau, r, \varphi) \Big|_{r=\xi_{1,2-}(\tau, \varphi)} = T(\tau, r, \varphi) \Big|_{r=\xi_{1,2+}(\tau, \varphi)} = T_{кр}, \quad r_{1,2} = \xi_{1,2}(\tau, \varphi), \quad (15)$$

где $\xi_1(\varphi)$ и $\xi_2(\varphi)$ – границы раздела фаз.

Условия Стефана:

$$\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{1-}} - \lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{1+}} = \mu \rho_{кр} \left(\theta_m(\tau) \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} \right), \quad \xi_1(0, \varphi) = \xi_{1_0}(\varphi) \quad (16)$$

$$\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{2+}} - \lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{2-}} = -\mu \rho_{кр} \left(\theta_m(\tau) \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} \right), \quad \xi_2(0, \varphi) = \xi_{2_0}(\varphi).$$

Граничные условия на криволинейных участках:

— по внутреннему радиусу:

$$-\lambda(T, \varphi) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m} = \alpha_I(G_m(\tau), \varphi) \cdot (T_{I_m} - T|_{r=r_m}) + C_{I_m} (T_{I_m}^4 - (T|_{r=r_m})^4)$$

— по внешнему радиусу:

(17)

$$\lambda(T, \varphi) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_m+2l} = \alpha_E(G_m(\tau), \varphi) \cdot (T_{E_m} - T|_{r=r_m+2l}) + C_{E_m} (T_{E_m}^4 - (T|_{r=r_m+2l})^4),$$

где α_I , α_E , C_{I_m} , C_{E_m} , T_{I_m} , T_{E_m} – коэффициенты теплоотдачи от поверхности слитка в окружающую среду, приведённые коэффициенты излучения от поверхности слитка, температура окружающей среды в m -й секции ЗВО по внутреннему и по внешнему радиусам соответственно, $G_m(\tau)$ – расход воды на m -й секции.

Уравнение тепломассопереноса на прямолинейном участке:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial x} = \frac{1}{c(T, x, z) \rho(T, x, z)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\} \quad (18)$$

Если жидкая фаза продолжается дальше точки выпрямления, то на прямолинейном участке ЗВО также задаются условия равенства температур на границе раздела фаз:

$$T(\tau, x, z) \Big|_{x=\xi_{1,2-}(x,z)} = T(\tau, x, z) \Big|_{x=\xi_{1,2+}(x,z)} = T_{кр}, \quad (19)$$

и условия Стефана:

$$\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{1-}} - \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{1+}} = \mu \rho_{кр} \left(v(\tau) \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} \right), \quad (20)$$

$$\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{2+}} - \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi_{2-}} = -\mu \rho_{кр} \left(v(\tau) \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} \right).$$

Граничные условия на прямолинейном участке:

— по внутреннему радиусу:

$$-\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_p} = \alpha_I(G_m(\tau), x) \cdot (T_{I_{o.c.z_p}} - T|_{z=z_p}) + C_{I4} (T_{I_{o.c.z_p}}^4 - (T|_{z=z_p})^4)$$

— по внешнему радиусу:

(21)

$$\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_p+2l} = \alpha_{Ez_p} (G_m(\tau), x) \cdot (T_{Eo.c.z_p} - T|_{z=z_p+2l}) + C_{Ez_p} \left(T_{Eo.c.z_p}^4 - (T|_{z=z_p+2l})^4 \right).$$

Считаем, что в конце прямолинейного участка тепловой поток равен нулю:

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_p} = 0. \quad (22)$$

Заданы начальные условия для всего поля температур:

на прямолинейных участках:

$$T(0, x, z) = T_0(x, z)$$

и на криволинейных участках:

$$T(0, r, \varphi) = T_0(r, \varphi).$$

(23)

Причём начальная температура есть непрерывная функция на всей области слитка и стенки кристаллизатора.

Конечно-разностные аппроксимации исходных уравнений.

В области первичной зоны охлаждения «Кристаллизатор» введём следующие равномерные прямоугольные сетки (рис.3):

- на $(0, l) \times (0, Z)$ – слиток внутри кристаллизатора – сетка $\omega_{q,h}$ с шагами $q = \frac{l}{N}$ и

$$h = \frac{Z}{M};$$

- на $(l + \delta_3, l + \delta_3 + d) \times (z_0, 0)$ (стенка кристаллизатора выше уровня мениска)

сетка ω_{s,h_1} с шагами $s = \frac{d}{K}$ и $h_1 = \frac{z_0}{P}$;

- на $(l + \delta_3, l + \delta_3 + d) \times (0, Z)$ (стенка кристаллизатора ниже уровня мениска)

сетка $\omega_{s,h}$.

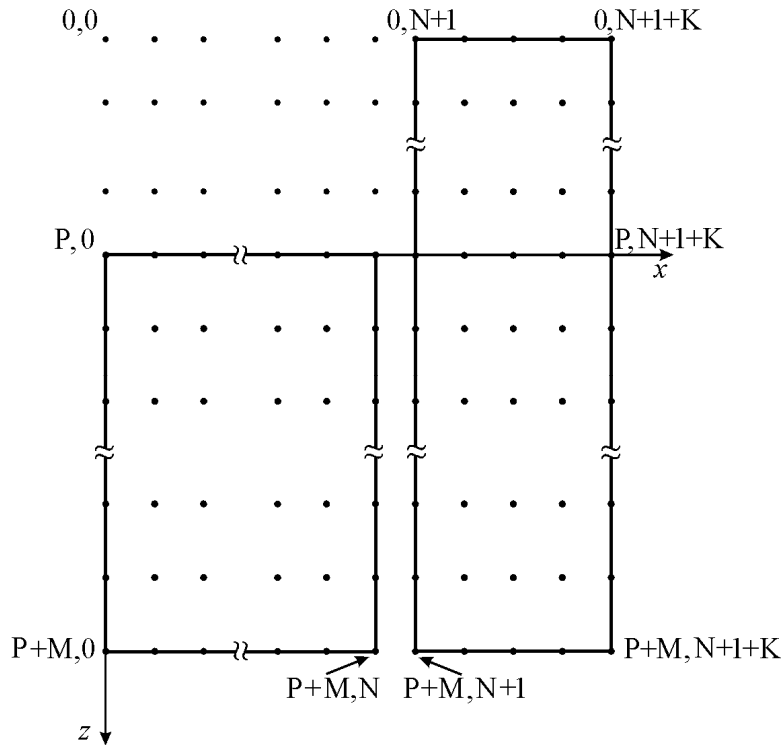


Рисунок 3. Сеточное разбиение слитка внутри кристаллизатора и стенки кристаллизатора

В области ЗВО введём следующие конечно-разностные сетки. На каждом участке с постоянной кривизной введём равномерную сетку ω_{q,f_i} (рис.4) с шагом по радиусу $q = \frac{l}{N}$ (совпадает с шагом по координате x в кристаллизаторе) и шагом по углу $f_m = \frac{r_m}{M_m}$, где m – номер участка, r_m – радиус кривизны внутренней поверхности слитка на m -м участке. На прямолинейном участке – прямоугольную равномерную сетку ω_{q,h_2} , $h_2 = \frac{x_2}{M_4}$, x_2 – длина прямолинейного участка, M_4 – число отрезков разбиения по длине.

Введём систему временных интервалов $\{\tau_k\}$, $k=0,1,2,\dots$ и соответствующую равномерную сетку по времени ω_τ , $\tau_k = \Delta\tau$ для всех $k=0,1,2,\dots$

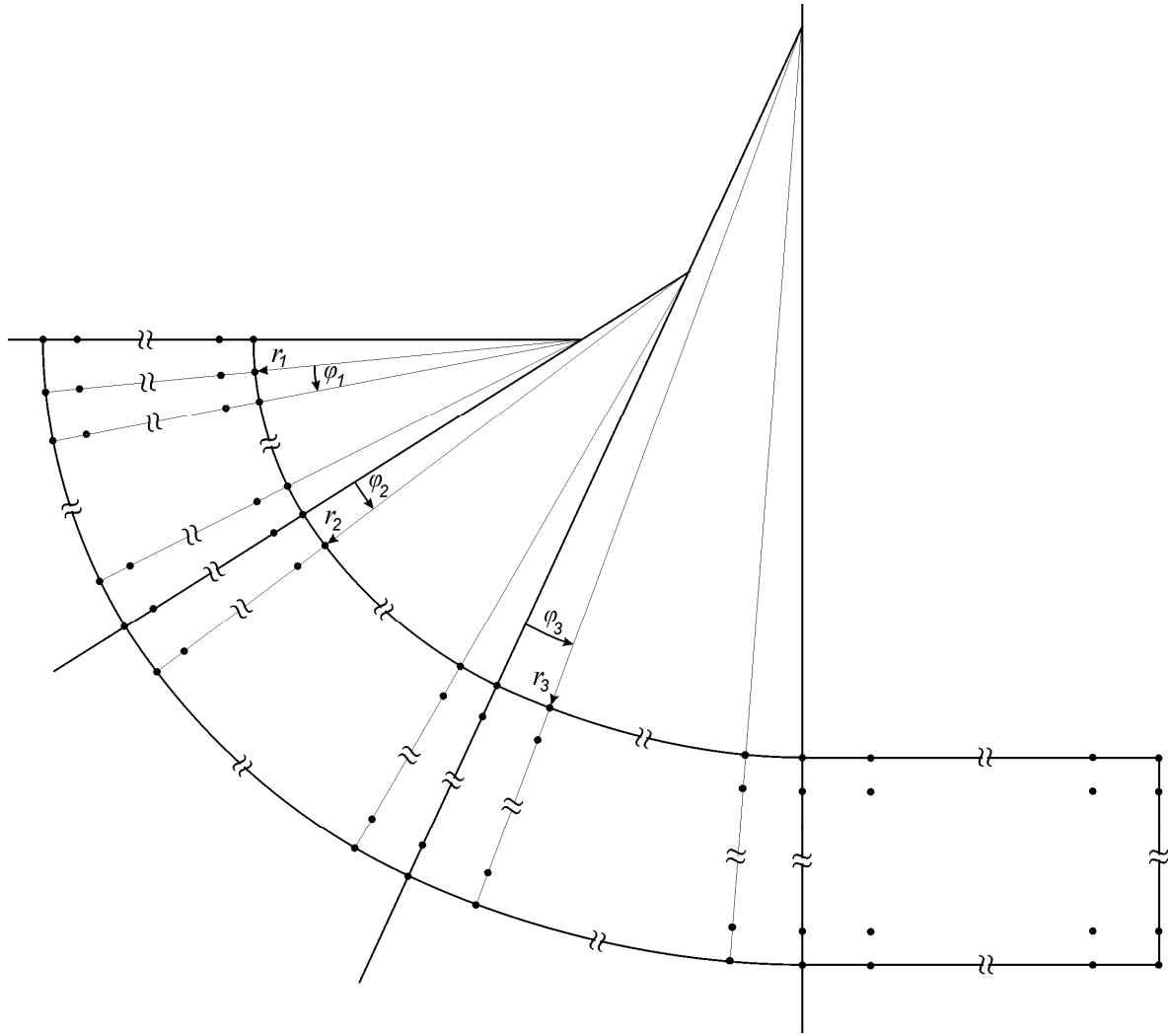


Рисунок 4. Сеточное разбиение ЗВО

Поставим в соответствие задаче (1) – (23) конечно-разностную задачу.

Перепишем уравнение теплопереноса в слитке внутри кристаллизатора (1) в недивергентной форме и построим его конечно-разностный аналог, используя пятиточечный шаблон:

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} + v_k \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} = \\
 & = \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{q^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{q} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} + \right. \\
 & \left. + \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{h^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{h} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} \right\}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Это так называемая явная схема [4], погрешность аппроксимации определяется шагами сетки по времени и пространственным координатам $O[\Delta\tau, q^2, h]$.

Граничному условию (2) соответствует уравнение

$$-\lambda_{k,i,0} \frac{3T_{k,i,0} - 4T_{k,i,1} + T_{k,i,2}}{2h} = C_n \left[\left(\frac{T_{\text{окр.ср.4}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{k,i,0}}{100} \right)^4 \right] \quad (25)$$

с погрешностью аппроксимации $O[h^2]$.

Граничным условиям (3) и (4) ставятся в соответствие следующие уравнения:

$$3T_{k,0,j} = 4T_{k,1,j} - T_{k,2,j}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k,N,j} \frac{T_{k,N-2,j} - 4T_{k,N-1,j} + 3T_{k,N,j}}{2q} = \\ = \frac{\lambda_{\Gamma.3}}{\delta_3} (T_{k,N,j} - T_{k,N+1,j}) + C_n \left[\left(\frac{T_{k,N+1,j}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{k,N,j}}{100} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

с погрешностью $O[q^2]$.

Уравнению теплопроводности внутри стенки кристаллизатора (9) ставится в соответствие следующая конечно-разностная аппроксимация:

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} = \\ = \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{s^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{s} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{s} + \right. \\ \left. + \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{h^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{h} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

с погрешностью $O[\Delta\tau, s^2, h^2]$.

Разностные уравнения, соответствующие граничным условиям (10) выберем следующим образом:

$$\lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,N+K-1,j} - 4T_{k,N+K,j} + 3T_{k,N+K+1,j}}{2s} = \alpha_1 (T_{v_{k,j}} - T_{k,N+K+1,j}). \quad (29)$$

Аналогично записываются конечно-разностные уравнения для других границ стенки кристаллизатора.

Балансовому уравнению (11) соответствует уравнение

$$c_{\theta} S_{\theta} v_{\theta} \frac{T_{\theta_{k,j}} - T_{\theta_{k,j-1}}}{h} = P_c \alpha_1 (T_{\theta_{k,j}} - T_{k,N+K+1,j}) - P_{\text{вн}} \alpha_{\text{вн}} (T_{k,N+K+1,j} - T_{\text{вн}}) \quad (30)$$

с погрешностью $O[h]$.

Конечно-разностный аналог уравнения тепломассопереноса в ЗВО:

$$\frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} + \theta_{mk} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{f_m} =$$

$$= \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{q^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{q} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_m^2} \left(\lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{f_m^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{f_m} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{f_m} \right) + \frac{\lambda_{k,i,j}}{r_m} \cdot \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} \right\}$$

с погрешностью $O[\Delta\tau, q, f_m]$.

Алгоритм решения системы алгебраических уравнений

После проведения оценки максимально допустимого шага по времени для устойчивости [3] построенной нами явной разностной схемы приступаем к перерасчёту всего поля температур по следующему алгоритму:

1. Расчёт температуры охлаждающей воды в канале кристаллизатора.
2. Расчёт граничных условий для стенки кристаллизатора.
3. Расчёт температуры внутри стенки кристаллизатора.
4. Расчёт граничных условий для слитка.
5. Расчёт температуры во внутренних точках слитка и положения границы раздела фаз.

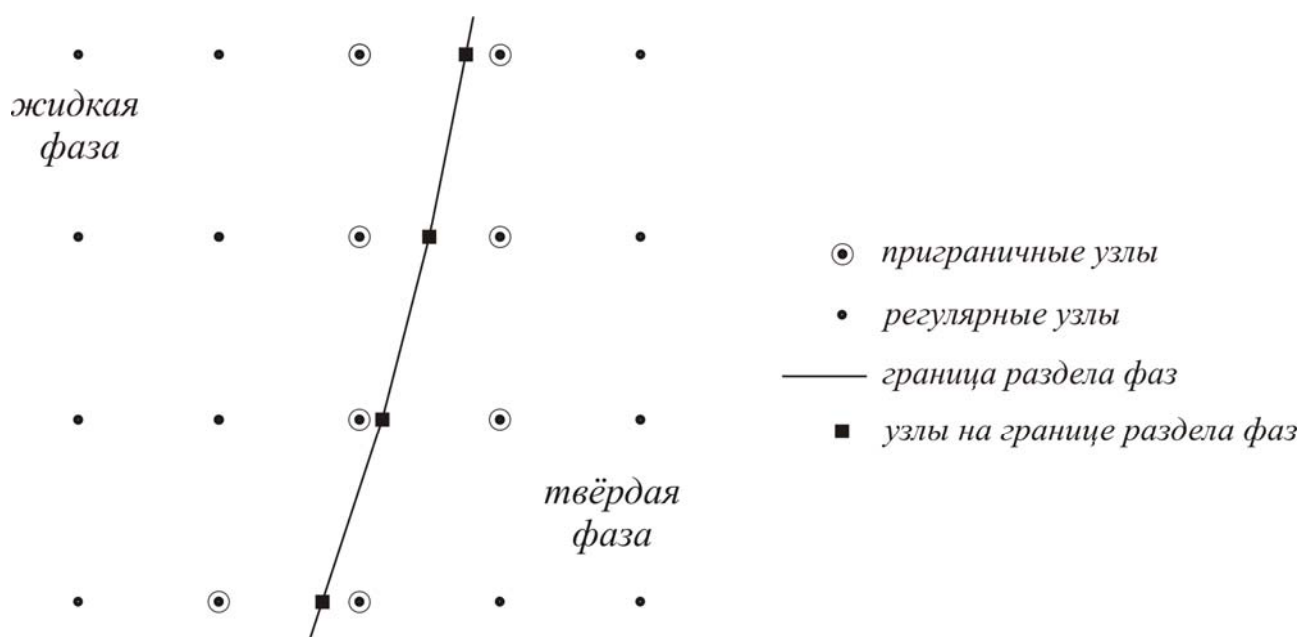


Рисунок 5. Граница раздела фаз в основной сетке

Узлы на границе раздела фаз образуются в точках её пересечения с поперечными линиями разностной сетки (рис.5). Температура в них равна температуре кристаллизации.

Узлы основной сетки, которые лежат в непосредственной близости к границе раздела фаз, будем называть приграничными. В них нельзя пересчитывать температуру по предложенной нами схеме, т.к. будет нарушено условие устойчивости разностных схем [3].

Поэтому сначала вычисляем температуру в «регулярных» узлах, пользуясь явной схемой (24).

Теперь можем найти новое положение границы раздела фаз. Заменяя в условиях Стефана (6, 16) производные конечными разностями, получим связь положения неизвестной границы с температурой в приграничных узлах. Рассмотрим сначала область кристаллизатора. Пусть новое

положение границы $\{\xi_j^{k+1}\}$, $j = \overline{P, P+M}$. Обозначим приграничный узел сетки слева от ξ_j^{k+1} $x_{i,j}$. Чтобы приблизить производную температуры по нормали в точке ξ_j^{k+1} , введём специальные узлы, которые вместе с точкой ξ_j^{k+1} образуют равномерный пятиточечный шаблон с шагами q и h (рис. 6). Итак, получаем конечно-разностный аналог уравнения (6)

$$\lambda \left(\sqrt{\left(\frac{U_2 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_4 - T_{kr}}{h}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{U_1 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_3 - T_{kr}}{h}\right)^2} \right) = \mu \rho \left(\frac{\xi_j^{k+1} - \xi_j^k}{\Delta t} + v \frac{\xi_j^{k+1} - \xi_{j-1}^{k+1}}{h} \right) \quad (31)$$

Температура в точке ξ_j^{k+1} равна температуре кристаллизации. Тогда температуру U_1 в специальном узле x можно с высокой степенью точности приблизить полиномом Лагранжа 2-й степени:

$$U_1 = T_{kr} \cdot \frac{(x - x_{i+1,j})(x - x_{i+2,j})}{(\xi_j^{k+1} - x_{i+1,j})(\xi_j^{k+1} - x_{i+2,j})} + T_{i+1,j} \cdot \frac{(x - \xi_j^{k+1})(x - x_{i+2,j})}{(x_{i+1,j} - \xi_j^{k+1})(x_{i+1,j} - x_{i+2,j})} + \\ + T_{i+2,j} \cdot \frac{(x - \xi_j^{k+1})(x - x_{i+1,j})}{(x_{i+2,j} - \xi_j^{k+1})(x_{i+2,j} - x_{i+1,j})}$$

Аналогично определяется температура U_2, U_3, U_4 в остальных специальных узлах. Подставляя полученные выражения в конечно-разностный аналог условия Стефана (31), получаем следующую систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестной границы:

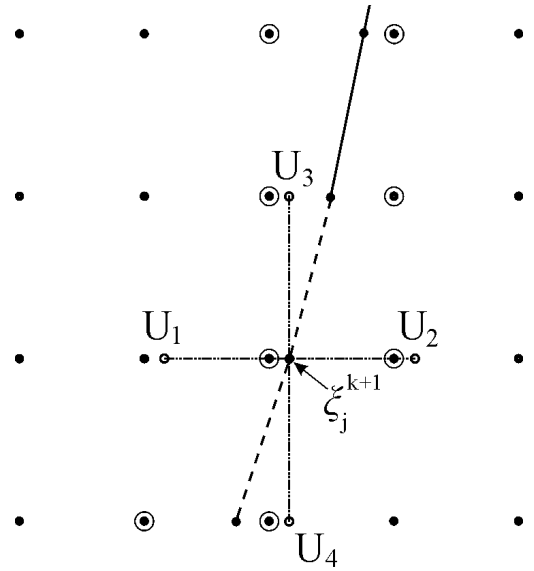


Рисунок 6. Схема для расчёта положения границы раздела фаз

$$\xi_j^{k+1} = \xi_j^k + \Delta t \left\{ \frac{\lambda}{\mu\rho} \left(\sqrt{\left(\frac{U_2 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_4 - T_{kr}}{h}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{U_1 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_3 - T_{kr}}{h}\right)^2} \right) - v \frac{\xi_j^{k+1} - \xi_{j-1}^{k+1}}{h} \right\} \quad (32)$$

$$P \leq j \leq P+M.$$

Систему решаем методом итераций. Аналогичным образом определяем положение неизвестной границы в ЗВО.

Получив новое положение границы раздела фаз, можем интерполировать температуру в «приграничных» узлах.

Остаётся ещё два особых момента: на уровне мениска и на уровне точки окончательного затвердевания, за которой в слитке присутствует только твёрдая фаза, и координаты которой являются характеристикой глубины жидкой фазы. Здесь недостаточно внутренних узлов в твёрдой или жидкой фазах. Для расчётов в таких точках применяются специальные алгоритмы.

Расчёт на уровне мениска. Для вычислений представленным нами ранее способом недостаточно узлов в твёрдой фазе. Если $l - \xi_j < q$, то для пересчёта положения границы раздела фаз в качестве U_2 используем значение $T_{N,j}$ и шаблон с уменьшенным шагом по координате x , равным $l - \xi_j$.

Расчёт на уровне точки окончательного затвердевания. Здесь недостаточно регулярных узлов внутри жидкой фазы. Поэтому будем считать, что если расстояние между ξ_1 и ξ_2 стало меньше заданной нами величины, то через некоторое небольшое число шагов по длине слитка находится точка окончательного затвердевания. Определим её координаты, исходя из общего поведения ξ_1 и ξ_2 . Далее воспользуемся тем свойством, что производная по нормали к границе раздела фаз со стороны жидкой фазы в этом месте очень близка к нулю, и доопределим температуру во внутренних приграничных узлах равной температуре кристаллизации.

Анализ результатов моделирования. Представленный алгоритм был программно реализован в среде программирования Borland C++ Builder 6.0. Расчёты проведены для марки стали 40 и геометрических параметров криволинейной МНЛЗ, аналог которой установлен на ОАО «МК «Азовсталь». Толщина слитка равна 0,2м.

На рисунке 7 представлены графики зависимости глубины жидкой фазы от скорости вытягивания слитка при различных режимах охлаждения. Глубина жидкой лунки определена для установившегося процесса. Режимы расхода воды (на одну форсунку) следующие:

$$\text{№1} : G_1=0,00032(\text{м}^3/\text{сек}), G_2=0,00028(\text{м}^3/\text{сек}), G_3=0,00024(\text{м}^3/\text{сек});$$

$$\text{№2} : G_1=0,0003(\text{м}^3/\text{сек}), G_2=0,00025(\text{м}^3/\text{сек}), G_3=0,00019(\text{м}^3/\text{сек});$$

$$\text{№3} : G_1=0,00026(\text{м}^3/\text{сек}), G_2=0,0002(\text{м}^3/\text{сек}), G_3=0,00013(\text{м}^3/\text{сек}).$$

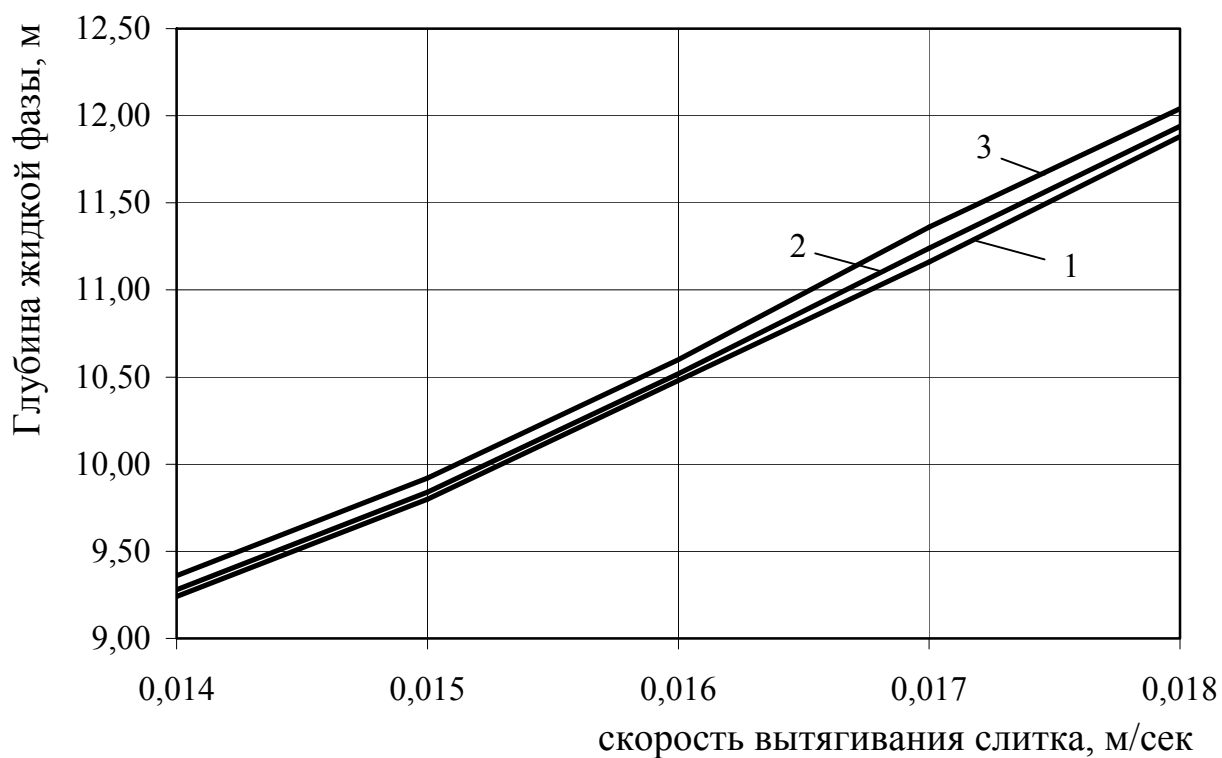


Рисунок 7. Глубина жидкой фазы в зависимости от скорости вытягивания слитка при различных режимах охлаждения (цифры соответствуют номеру режима расхода воды).

Таким образом, для различных марок стали и различных скоростей вытягивания слитка можно определить при каких режимах расхода охлаждающей воды будет поддерживаться оптимальная глубина жидкой лунки.

На рис.8 представлены графики распределения температуры вдоль поверхности, на некотором расстоянии от поверхности и на оси слитка. На тех участках поверхности, которые в данный момент накрываются факелом форсунки, распыляющей охлаждающую водо-воздушную смесь, наблюдаются падения значений температуры на величину от 40 до 70 К. Из результатов моделирования видно, что кривизна слитка влечёт за собой асимметрию температурного поля. Даже при одинаковой интенсивности охлаждения на поверхностях внутреннего и внешнего радиусов температура на внешней поверхности несколько ниже. Такое же явление наблюдается в производственных условиях.

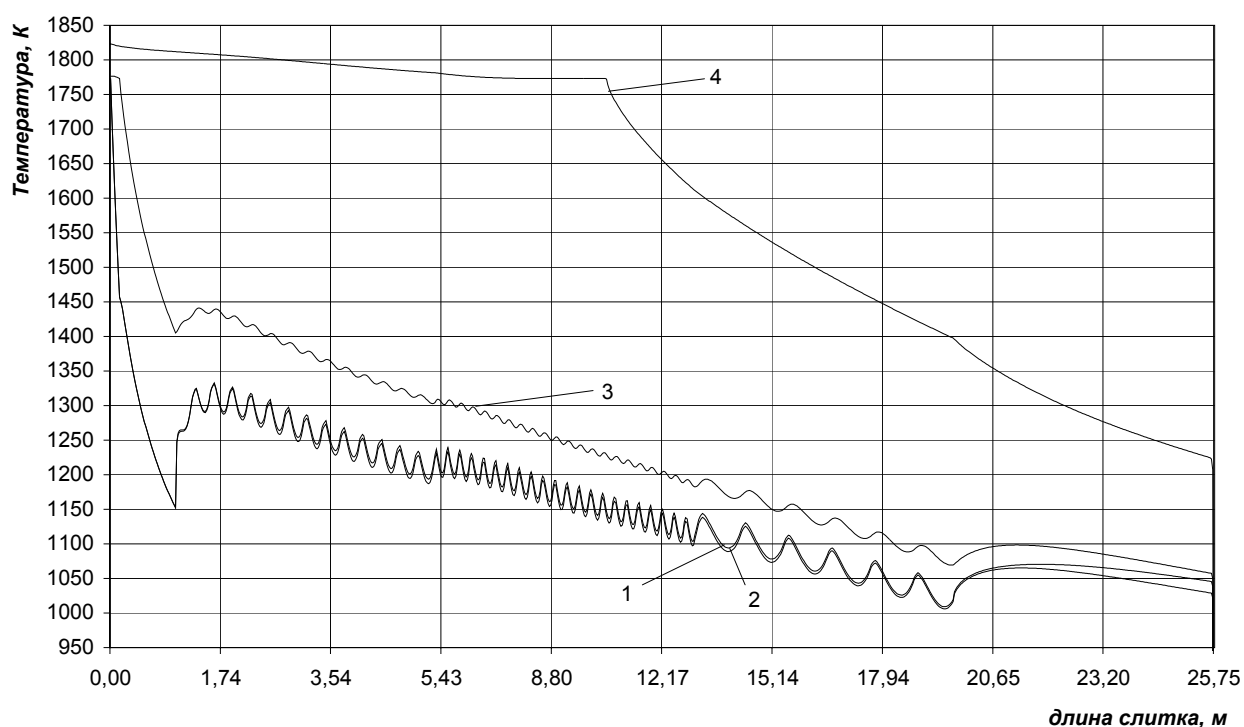


Рисунок 8. Температура слитка. 1 – внутренняя поверхность, 2 – внешняя поверхность, 3 – на расстоянии 4мм от внешней поверхности, 4 – на оси слитка.

Для исследования степени влияния изменения входных параметров (расходов охлаждающей воды в кристаллизаторе и в каждой секции ЗВО) на изменение температуры слитка были построены графики чувствительности динамической системы по параметрам [5]. Под чувствительностью в данном случае понимается реакция процесса на 10-ти процентное изменение рассматриваемого параметра. Поочерёдно **вносились возмущения на расходы воды** в различных зонах охлаждения слитка. Расчёт для нового расхода воды производился до тех пор, пока поле температур вновь не стабилизировалось.

На рис.9 показана чувствительность температуры поверхности слитка. Результаты исследований показывают, что изменение расхода охлаждающей воды на кристаллизатор имеет очень незначительное влияние, и поэтому этот параметр не используется в качестве управляющего. В то же время из анализа трёх остальных кривых можно сделать вывод, что процесс достаточно чувствителен к изменениям величин расхода воды в любой из секций ЗВО.

Кроме этого из графиков видно, что чувствительность зависит ещё и от температуры заготовки, и от места расположения форсунок, подающих водо-воздушную смесь. Чем выше температура, тем больше чувствительность к изменениям расхода воды в ЗВО. Чувствительность, естественно, выше на участках непосредственно находящихся внутри зоны действия форсунки исследуемой секции. Функции чувствительности имеют

экстремумы в точках, соответствующих концам секций ЗВО. На графике видна также динамика затухания чувствительности к концу непрерывного слитка.

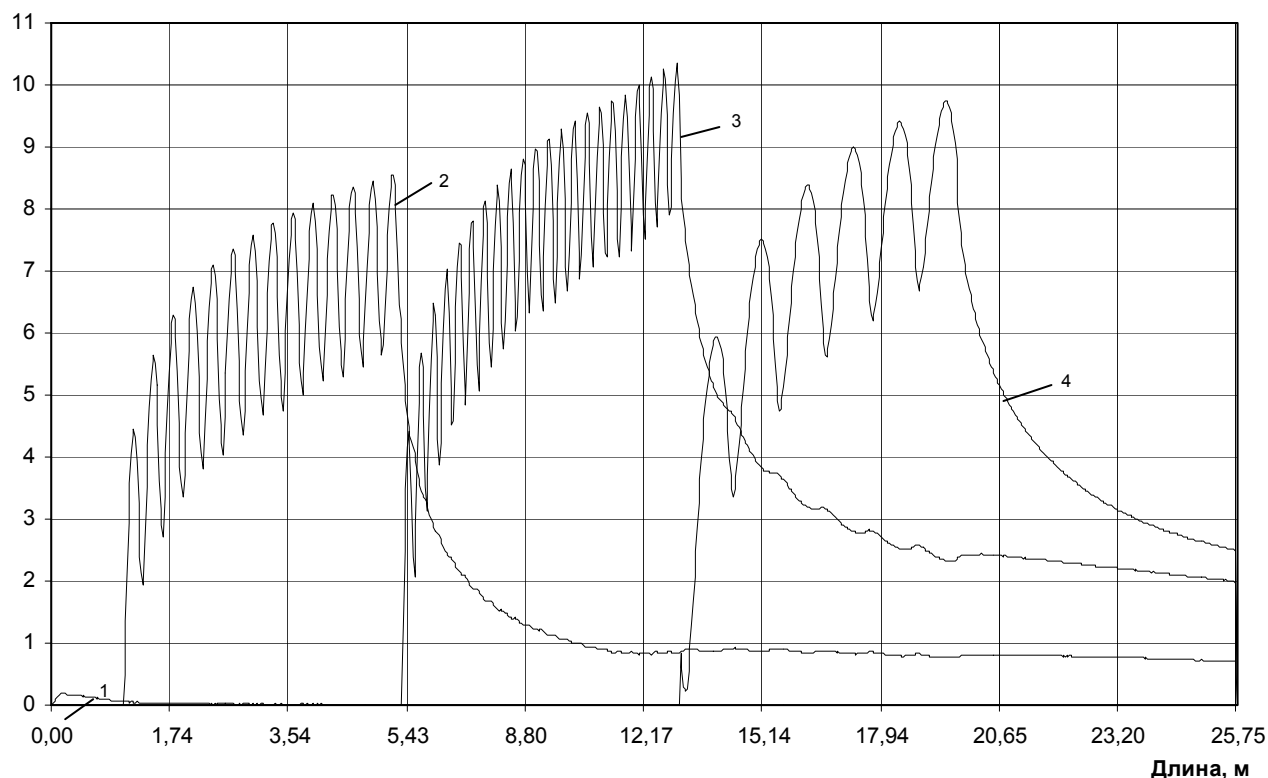


Рисунок 9. Чувствительность температуры поверхности слитка к изменению расхода охлаждающей воды: 1 – в кристаллизаторе; 2 – в 1-й секции ЗВО; 3 – во 2-й секции ЗВО; 4 – в 3-й секции ЗВО.

Выводы. Таким образом, построенная математическая модель учитывает важнейшие технологические параметры и особенности тепловых процессов МНЛЗ и позволяет воспроизвести динамику тепловых процессов в условиях изменяющихся во времени основных параметров таких, как скорость движения слитка, температура разливаемого металла и температура охлаждающей воды в кристаллизаторе и ЗВО. Использована полярная система координат, которая является более естественной при описании геометрии слитка криволинейных и радиальных МНЛЗ и существенно упрощает процедуру расчётов по модели. Математическая модель адекватна моделируемому процессу на качественном уровне и хорошо соответствует данным, полученным в производственных условиях. Выполненные исследования чувствительности температуры слитка к изменениям расхода охлаждающей воды позволяют численно оценить влияние управляющих воздействий на температурное поле слитка. Модель может быть использована для разработки технологии и режимов непрерывной разливки стали, а также при разработке системы автоматического управления процессом для синтеза

алгоритмов управления и для непосредственного использования в системе управления с целью оперативной оценки температурного состояния разливаемого металла.

The mathematical model of non-stationary thermal process of a continuous ingot of curvilinear continuous casting machine (CCM) is proposed, explicit schemes of finite-difference approximation and solution algorithm of the problem are developed, the analysis of numerical results is performed.

1. Смирнов А.Н., Пилюшенко В.Л., Минаев А.А., Момот С.В., Белобров Ю.Н. Процессы непрерывной разливки стали. Донецк: ДонНТУ, 2002. – 536 с.
2. Теория непрерывной разливки. Технологические основы. Авт.: Рутес В.С., Аскольдов В.И., Евтеев Д.П., Генкин В.Я., Чигринов М.Г., Манохин А.И. М.: Металлургия, 1971. – 296 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А.. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. – 724 с.
4. Самарский А.А.. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. – 656 с.
5. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. – 464 с.