

УДК 531.38

©1997. И.Н. Гашененко

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ОДНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Исследована структура совместных уровней первых интегралов в интегрируемом случае движения гиростата, обобщившем классический случай С.В.Ковалевской. Качественное описание эволюции и перестроек торов Лиувилля на трёхмерных изоэнергетических поверхностях получено с помощью топологических инвариантов А.Т.Фоменко.

1. Поместим в поле силы тяжести гиростат, главные моменты инерции которого удовлетворяют соотношениям  $A = B = 2C$ , центр масс находится на первой оси инерции, а гиростатический момент направлен вдоль третьей оси. Уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки запишем в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} 2\dot{p} &= (r - \lambda)q, & 2\dot{q} &= -(r - \lambda)p - \nu_3, & \dot{r} &= \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= r\nu_2 - q\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= p\nu_3 - r\nu_1, & \dot{\nu}_3 &= q\nu_1 - p\nu_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно [9] первыми интегралами (1) будут

$$\begin{aligned} H &= p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 = h, \\ K &= (\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 + 2\lambda[(r - \lambda)(p^2 + q^2) + 2p\nu_3] = k, \\ L &= 2(p\nu_1 + q\nu_2) + (r + \lambda)\nu_3 = l, \\ I &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Интегралы (2) позволяют свести уравнения (1) к квадратурам, однако простые квадратурные формулы для этих уравнений до сих пор не найдены. Каждому значению параметра  $\lambda$  соответствует динамическая система, ещё более сложная, чем в классическом случае Ковалевской. Рассматриваемая задача отличается от известных интегрируемых случаев не только аналитической сложностью, но и разнообразием возможных типов движений гиростата. Все эти движения описываются единым однопараметрическим семейством динамических систем (1). Изучение топологии динамической системы (1) даёт общее (хоть и грубое) представление о её поведении. Целью настоящей работы является качественный анализ движений гиростата с помощью топологических методов [2, 7], позволяющих исследовать перестройки и взаимодействие траекторий - решений системы (1),(2).

Зафиксируем постоянные  $h, k, l, \lambda$ . Совместная поверхность уровня функций  $H, L, I$ , заданных на евклидовом пространстве  $R^6$ , инвариантна относительно фазового потока системы (1). Будем называть

$$Q_{h,l}^3(\lambda) = \{H = h, L = l, I = 1\} \subset R^6$$

изоэнергетической поверхностью. Топологический тип  $Q_{h,l}^3$  однозначно определяется проекцией  $B_{h,l} = \pi(Q_{h,l}^3)$  изоэнергетической поверхности на сферу  $S^2 = \{I = 1\}$ . Действительно, многообразие  $Q_{h,l}^3$  диффеоморфно расслоенному пространству с базой  $B_{h,l}$  и слоем  $S^1$ , у которого слои над  $\partial B_{h,l}$  отождествлены в точки. Из (2) находим, что область  $B_{h,l}$  состоит из тех (и только тех) точек  $S^2 = \{I = 1\}$ , для которых выполняется неравенство

$$(l - \lambda\nu_3)^2 \leq 2(h + \nu_1)(2 - \nu_3^2).$$

Топология  $B_{h,l}$  и, следовательно,  $Q_{h,l}^3$  меняется при прохождении множества  $\tilde{\Sigma} \subset R^2(h, l)$ , состоящего из критических значений отображения  $\tilde{F} = H \times L : S^2 \times R^3 \rightarrow R^2(h, l)$ . Точкам  $(h, l) \in R^2(h, l) \setminus \tilde{\Sigma}$  отвечают связные трёхмерные изоэнергетические поверхности  $Q_{h,l}^3$ , каждая из которых диффеоморфна одному из следующих многообразий:  $RP^3$ ,  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $K^3$ , где  $K^3$  является связной суммой двух экземпляров  $S^1 \times S^2$ .

Интегрируемость уравнений (1) позволяет изучить структуру изоэнергетических поверхностей более детально. Дополнительный интеграл  $K$  расслаивает  $Q_{h,l}^3$  на двумерные поверхности уровня

$$J_{h,k,l}(\lambda) = \{H = h, K = k, L = l, I = 1\} \subset R^6.$$

По теореме Лиувилля неособая компактная поверхность  $J_{h,k,l}$  является объединением двумерных торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Основную роль в классификации критических и регулярных поверхностей  $J_{h,k,l}$  играет бифуркационное множество  $\Sigma \subset R^3(h, k, l)$ , состоящее из критических значений отображения  $F = H \times K \times L : S^2 \times R^3 \rightarrow R^3(h, k, l)$ . М.П.Харламов [7] построил множество  $\Sigma$  и изучил топологию поверхностей  $J_{h,k,l}$  в известных интегрируемых случаях динамики твёрдого тела и, в частности, в случае Ковалевской. Бифуркационное множество  $\Sigma \subset R^3(h, k, l)$  интегрируемого случая (1),(2) указано в работах [3, 4] и полностью изучено в работе [6] (исследованы особые точки и перестройки бифуркационного множества, дана полная классификация бифуркационных диаграмм на плоскости  $R^2(h, k)$ ).

2. В случае Ковалевской структуру поверхностей  $J_{h,k,l}$  удобно изучать по их проекциям на плоскость  $R^2(p, q)$  [1, 7]. Во-первых, "квадратурные" переменные  $s_1, s_2$  тогда

получают простую геометрическую интерпретацию; во-вторых, образы поверхностей  $J_{h,k,l}$  симметричны не только относительно преобразования  $(p, q) \rightarrow (p, -q)$ , но также переходят сами в себя при инверсии плоскости  $R^2(p, q)$  относительно окружности

$$S^1 = \{(p - a)^2 + q^2 = b\}, \quad (3)$$

где постоянные  $a, b$  зависят от  $h, k, l$ . Как следует из дальнейшего, такая симметрия образов многообразий  $J_{h,k,l}$  на плоскости  $R^2(p, q)$  сохраняется и для гиростата.

Выберем постоянные  $h, k, l, \lambda$  так, чтобы полином  $P(x) = -x^4 + (2h - \lambda^2)x^2 + 2lx + 1 - k$  не имел кратных корней. Действительные параметры  $a, b$  зададим следующим образом: пусть  $a$  – корень кубического полинома  $f(x) = P'(x) + 16x^2P(x)$  и  $4ab = -P'(a)$ . Введем комплексные переменные  $x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}$  по формулам

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= p \pm iq, & y_{1,2} &= ((r - \lambda)x_{1,2} + \nu_3)\mu_{1,2}, \\ z_{1,2} &= (x_{1,2}^2 + \nu_1 \pm i\nu_2)(x_2 - x_1)^2\mu_{1,2}^2 \pm 2\lambda y_{1,2}(x_2 - x_1)\mu_{1,2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu_{1,2} = \sqrt{b}((x_{1,2} - a)^2 - b)^{-1}$ . Тогда интегралы (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1y_2 - R(x_1, x_2)\mu_1\mu_2 = 0, \\ f_2 &= A_1y_1^2 + A_2y_2^2 + B_1y_1 + B_2y_2 + C_0 = k, \\ f_3 &= y_1^2 - z_1 - P(x_1)\mu_1^2 = 0, \\ f_4 &= y_2^2 - z_2 - P(x_2)\mu_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + (2h - \lambda^2)x_1x_2 + l(x_1 + x_2) + 1 - k$ ,  $P(x) = R(x, x)$ ,  $A_1 = \bar{A}_2 = -P(x_2)\mu_1^{-2}(x_2 - x_1)^{-4}$ ,  $B_1 = \bar{B}_2 = 2\lambda[R(x_1, x_2) + P(x_2) + x_2^2(x_2 - x_1)^2]\mu_1^{-1}(x_2 - x_1)^{-3}$ ,  $C_0 = R^2(x_1, x_2)(x_2 - x_1)^{-4} + P(x_1)P(x_2)(x_2 - x_1)^{-4} - 4\lambda^2R(x_1, x_2)(x_2 - x_1)^{-2}$ .

Осуществим преобразование переменных  $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \rightarrow (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, z'_1, z'_2)$ :

$$x'_{1,2} = a + \frac{b}{x_{1,2} - a}, \quad y'_{1,2} = y_{1,2}, \quad z'_{1,2} = z_{1,2}. \quad (6)$$

Непосредственной подстановкой находим равенства

$$R(x'_1, x'_2) = \frac{b^2R(x_1, x_2)}{(x_1 - a)^2(x_2 - a)^2}, \quad P(x'_1) = \frac{b^2P(x_1)}{(x_1 - a)^4}, \quad P(x'_2) = \frac{b^2P(x_2)}{(x_2 - a)^4}.$$

Далее получаем, что в новых переменных вид функций (5) не меняется. Инвариантность  $f_i$  связана с симметриями уравнений (1), поэтому вернемся к исходным переменным  $p, q, \dots, \nu_3$  и запишем преобразование (6) для них:

$$\begin{aligned} p' &= a + (p - a)btm^{-1}, & q' &= -qbtm^{-1}, \\ r' &= 2\lambda - r - 2(p - a)m_1, & \nu'_1 &= -\nu_1 - tm_1^2 - 2(p - a)m_2, \\ \nu'_2 &= \nu_2 + 2qm_2, & \nu'_3 &= a(r - \lambda) + m_1(b + 2a(p - a)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$m = (p - a)^2 + q^2, \quad m_1 = (\nu_3 + a(r - \lambda))m^{-1}, \quad m_2 = a + am^{-1}(b + 2a(p - a)) + \lambda m_1 - (p - a)m_1^2.$$

Для невырожденности замены (6) следует исключить из рассмотрения точки  $R^6$ , в которых  $t = 0$ . Можно показать, что при условии  $P(a) < 0$  эти точки не принадлежат интегральным многообразиям  $J_{h,k,l}(\lambda)$ . Следующее утверждение проверяется подстановкой (7) в уравнения (1), (2).

**Предложение.** Если постоянные  $a, b$  действительные и удовлетворяют соотношениям  $f(a) = 0$ ,  $4ab = -P'(a)$ , то система уравнений (1) и интегралы (2) инвариантны относительно координатного преобразования (7).

Преобразование (7) переводит решения системы (1) в решения той же системы, а точку многообразия  $J_{h,k,l}$  с координатами  $(p, q, \dots, \nu_3)$  отображает в точку  $(p', q', \dots, \nu'_3)$ , также принадлежащую  $J_{h,k,l}$ . В случае  $l = 0$  одна из окружностей (3) вырождается в прямую  $\{(p, q) : p = 0\}$ . Тогда уравнения (1), (2) инвариантны относительно преобразования  $(p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \rightarrow (-p, -q, r, \nu_1, \nu_2, -\nu_3)$ .

3. Рассмотрим проекцию  $pr : (p, q, \dots, \nu_3) \rightarrow (p, q)$  и изучим структуру областей  $U_{h,k,l} = pr(J_{h,k,l}) \subset R^2(p, q)$ . В случае Ковалевской ( $\lambda = 0$ ) четыре точки многообразия  $J_{h,k,l}$  проектируются в каждую внутреннюю точку области  $U_{h,k,l}$  [7]. Для гиростата число прообразов произвольной внутренней точки области  $U_{h,k,l}$  равняется двум либо четырём. Не все качественные перестройки  $U_{h,k,l}$  связаны с перестройками  $J_{h,k,l}$  на множестве  $\Sigma \subset R^3(h, k, l)$ , поэтому здесь существуют различные типы областей  $U_{h,k,l}$  для диффеоморфных между собой интегральных многообразий  $J_{h,k,l}$ . Область  $U_{h,k,l}$  отображается в себя при инверсии плоскости  $R^2(p, q)$  относительно окружности (3) и при зеркальном отражении  $(p, q) \rightarrow (p, -q)$ . Это свойство позволяет находить эквивалентные  $U_{h,k,l}$ , устанавливать соответствия между областями  $U_{h,k,l}$  и многообразиями  $J_{h,k,l}$ . Из соотношений (5) следует, что движение рассматриваемого гиростата возможно лишь при тех значениях  $h, k, l, \lambda$ , при которых полином  $P(a)$  имеет действительные корни. Двум действительным корням  $P(a)$  отвечает одна окружность (3) на плоскости  $R^2(p, q)$ . Если все корни  $P(a)$  действительны, тогда две окружности вида (3) имеются на плоскости  $R^2(p, q)$ , и область  $U_{h,k,l}$  симметрична относительно каждой из них (см. рис. 1).

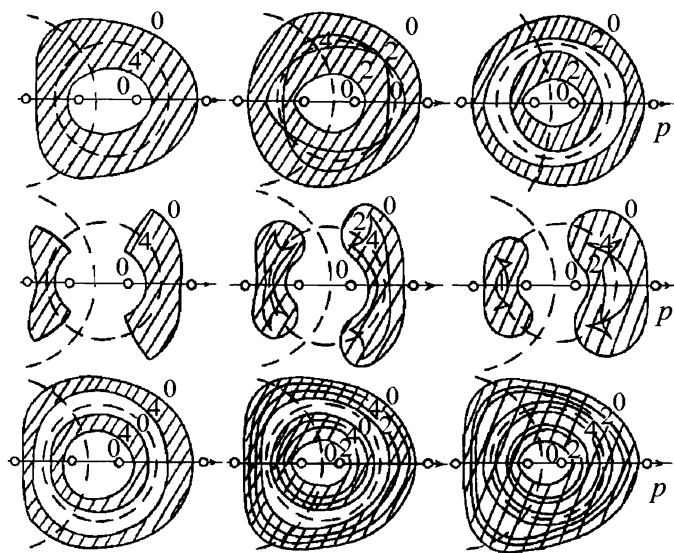


Рис. 1

При фиксированном значении  $\lambda$  бифуркационное множество  $\Sigma$  делит  $R^3(h, k, l)$  на открытые связные области  $\Omega_i$ , внутри которых сохраняется число торов в  $J_{h,k,l}$ . Множества  $\Sigma(\lambda)$ ,  $\Omega_i(\lambda)$ ,  $J_{h,k,l}(\lambda)$  зависят от параметра  $\lambda$  и деформируются при его непрерывном изменении. Для топологической классификации требуется в каждой области  $\Omega_i(\lambda)$  множества  $R^4(h, k, l, \lambda) \setminus \Sigma(\lambda)$  указать количество связных компонент  $J_{h,k,l}(\lambda)$ . Без ограничения общности примем  $\lambda \geq 0$ ,  $l \geq 0$ . В случае Ковалевской имеется пять областей  $\Omega_i \subset R^3$ , в которых интегральные многообразия  $J_{h,k,l}$  не пусты [7]. Такое разбиение  $R^3(h, k, l) \setminus \Sigma(\lambda)$  сохраняется для всех

значений  $\lambda \in (0, 2^{-3/4})$ , т.е. непрерывная деформация областей  $\Omega_i(\lambda)$  не меняет структуру многообразий  $J_{h,k,l}(\lambda)$ . Для  $(h, k, l) \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$  перестройки  $U_{h,k,l}(\lambda)$ , происходящие при увеличении параметра  $\lambda$ , показаны на рис. 1 (ось  $q$  вертикальна, на оси  $p$  отмечены действительные корни полинома  $P(a)$ ). При  $\lambda > 2^{-3/4}$  область  $\Omega_5(\lambda)$  вырождается, но появляется область  $\Omega_6(\lambda)$ , в которой многообразие  $J_{h,k,l}(\lambda)$  также состоит из четырёх торов Лиувилля [3].

Согласно [4] критические точки отображения  $F = H \times K \times L : S^2 \times R^3 \rightarrow R^3(h, k, l)$  организованы в критические окружности. Эти "топологические" окружности описываются алгебраическими уравнениями и отвечают двум семействам частных решений системы (1),(2), указанных П.В.Харламовым [8, 5]. В точках бифуркационного множества, принадлежащих кривой  $\{P(a) = P'(a) = 0\} \subset R^3(h, k, l)$ , замены (6),(7) вырождены. В этом случае при классификации поверхностей  $J_{h,k,l}$  удобно использовать вспомогательные переменные и квадратуры, полученные в работе [5].

4. Одной из основных качественных характеристик интегрируемой гамильтоновой системы является структура её лиувиллева слоения [2] (т.е. структура разбиения фазового пространства системы на торы Лиувилля и критические интегральные поверхности). В 1985 г. А.Т.Фоменко предложил новый подход в изучении этой структуры, позволяющий строить топологические инварианты и классифицировать слоения на трёхмерных изоэнергетических поверхностях. Интегрируемые случаи динамики твердого тела описаны и классифицированы в работах А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова и А.А.Ошемкова. С помощью молекул, изображающих структуру слоения на  $Q_{h,l}^3$ , ими детально исследован случай Ковалевской. Компьютерный анализ этого случая выполнен в работе [10].

Составим полный список молекул  $W_i$  для неособых изоэнергетических поверхностей, встречающихся в интегрируемом случае движения гиростата. Для этого запишем уравнения кривых, разделяющих плоскость  $R^2(h, l)$  на области с различными типами поверхностей  $Q_{h,l}^3$  и различными типами слоений на  $Q_{h,l}^3$ . Используем уравнения разделяющих кривых, полученные в [4]:

$$L_{1,2,3} = \{h = (2r - \lambda)\mu - \frac{r}{2}(r - \lambda), l^2 = 4r(\mu - \frac{r}{2})(r - \lambda)^2(\mu + \frac{\lambda}{2})^2\} \subset R^2(h, l), \quad (8)$$

где  $\mu = \text{sign}(r)\sqrt{r^2/4 + 1/(r - \lambda)^2}$ ,  $r \in (-\infty, 0) \cup (0, \lambda) \cup (\lambda, \infty)$ ,

$$L_4 = \{h = -\frac{1}{2u} - u - \frac{\lambda^2}{2}, l^2 = -\frac{(u + \lambda^2)}{u^2}, u \leq -\lambda^2\} \subset R^2(h, l), \quad (9)$$

$$L_5 = \{\frac{16}{27}(h - \frac{\lambda^2}{2})^3 - l^2 = 0\} \subset R^2(h, l), \quad (10)$$

$$L_6 = \{2h - l^2 + \lambda^2 - 3\lambda^{\frac{2}{3}} = 0\} \subset R^2(h, l). \quad (11)$$

В каждой точке  $(h, l)$ , не принадлежащей кривым (8)-(11), построим граф, вершины которого соответствуют особым слоям лиувиллева слоения на  $Q_{h,l}^3$ , а ребра изображают однопараметрические семейства торов. Число критических окружностей на каждом критическом уровне интеграла  $K = k$  определим с помощью соотношений П.В.Харламова [8, 4]. Анализ областей  $U_{h,k,l} \subset R^2(p, q)$  позволяет выяснить, сколько торов находится выше и ниже любого критического уровня. Обозначим перестройки торов, происходящие в окрестностях критических слоёв на  $Q_{h,l}^3$ , буквами-атомами  $A, A^*, B, C_2$ [2].

Молекулы  $W_i$  неособых изоэнергетических поверхностей интегрируемой системы (1),(2) представлены на рис. 2. Только молекула  $W_7$  из этого списка не встречалась ранее в случае Ковалевской [2]. При нулевой постоянной площадей отсутствует молекула  $W_4$  (численный анализ этого случая выполнен в [6]). Пары  $(RP^3, W_7)$ ,  $(RP^3, W_3)$  и  $(S^1 \times S^2, W_3)$  существуют лишь при  $\lambda \neq 0$ .

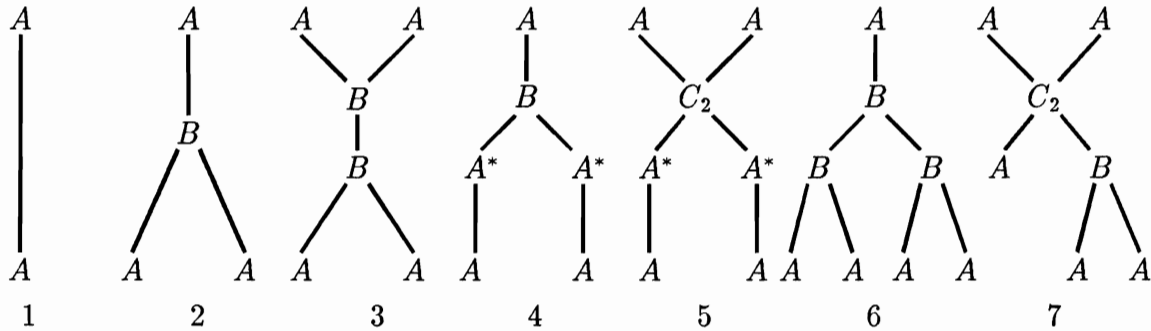


Рис. 2

Сформулируем основной результат:

**Теорема.** Интегрируемая система (1),(2) обладает следующими свойствами:

- а) неособые изоэнергетические поверхности  $Q_{h,l}^3$  диффеоморфны трёхмерным многообразиям четырёх типов:  $RP^3$ ,  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $K^3 = (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$ ;
- б) регулярные компоненты интегральных многообразий  $J_{h,k,l}(\lambda)$  диффеоморфны  $T^2$ ,  $2T^2$ ,  $4T^2$ ;
- в) перестройки  $J_{h,k,l}$ , происходящие в окрестностях критических слоёв на  $Q_{h,l}^3$ , описываются (в обозначениях [2]) атомами  $A, A^*, B, C_2$ ;
- г) возможные слоения Лиувилля неособых изоэнергетических поверхностей  $Q_{h,l}^3$  представлены молекулами  $W_1, \dots, W_7$ , табл. 1 содержит полный список пар  $(Q_{h,l}^3, W_i)$ .

Таблица 1

$Q_{h,l}^3$	Молекулы $W_i$				
$RP^3$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$
$S^3$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_6$	
$S^1 \times S^2$	$W_2$	$W_3$	$W_6$		
$K^3$	$W_6$				

Таблица 2

$\Omega_i \subset R^3 \setminus \Sigma$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$J_{h,k,l}$	$T^2$	$2T^2$	$2T^2$	$2T^2$	$4T^2$	$4T^2$

1. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжёлые гироскопы // Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Сб., посвящённый памяти С.В.Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–155.
2. *Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Топологическая классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Усп. математических наук – 1990. – 45, вып.2. – С. 49–77.
3. *Гашененко И.Н.* Бифуркационное множество в задаче о движении тяжёлого гиростата при условиях Ковалевской // Допов. НАНУ. – 1997. – Вып.2. – С. 60–62.
4. *Гашененко И.Н.* Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчинённого условиям Ковалевской // Механика твёрдого тела. – 1995. – Вып.27. – С. 31–35.
5. *Гашененко И.Н.* Новый класс движений тяжёлого гиростата // Докл. АН СССР. – 1991. – 318, вып.1. – С. 66–68.

6. Рябов П.Е. Бифуркационное множество задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1997. – 143 с.
7. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела. – Л.:Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
8. Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения твёрдого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твёрдого тела. – 1971. – Вып.3. – С. 57–64.
9. Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. – 1987. – Вып.4. – С. 88–90.
10. Dullin H.R., Juhnke M., Richter P.H. Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top // Intern. Jour. of Bifurcation and Chaos. – 1994. – 4, N 6. – P.1535-1562.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 28.09.97

УДК 531.38

©1997. А.Е. Малаха

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ

В данной работе на основе первого метода Ляпунова рассмотрены достаточные условия асимптотических движений гиростата, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а предельное движение характеризуется двумя линейными инвариантными соотношениями. Указаны ограничения на параметры гиростата и начальные условия, обеспечивающие существование асимптотического движения гиростата.

Обобщение интеграла Ковалевской в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести указано в работе Яхьи [7]. Исследование проблемы сведения данной задачи к квадратурам и изучение аналога IV класса решений по Аппельроту проведены И.Н. Гашененко [3]. В частности, им установлены асимптотические и квазипериодические движения. Предельное движение описывается двумя линейными инвариантными соотношениями. Поскольку для асимптотических движений важны характерные свойства асимптотичности, то представляет интерес исследование асимптотических движений гиростата Ковалевской по первому методу Ляпунова. Такой анализ для классического решения Ковалевской выполнил А.З. Брюм [1].

**Постановка задачи.** Уравнения движения гиростата имеют вид [6]:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega - \nu \times s, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Они допускают первые интегралы

$$(A\omega + \lambda) \cdot \nu = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2s \cdot \nu = 2E, \quad \nu \cdot \nu = 1. \quad (2)$$

Здесь  $\omega = (p, q, r)$  – угловая скорость гиростата;  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силового поля;  $\lambda$  – гиростатический момент;  $s$  – вектор центра масс;  $A = (A_{ij})$  – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; точка над переменными означает относительную производную.

Уравнения (1) будем рассматривать при условиях Ковалевской на  $A_{ij}$  и дополнительных условиях на  $s, \lambda$ :

$$A_{11} = A_{22} = 2A_{33}, \quad A_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad s = (s_1, 0, 0), \quad \lambda = (0, 0, \lambda_3). \quad (3)$$