

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1994

УДК 531.38

©1994. И.Н. Гашененко

ПОДВИЖНЫЙ ГОДОГРАФ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ В РЕШЕНИИ С.В. КОВАЛЕВСКОЙ

Исследовано трёхпараметрическое семейство сингулярных поверхностей – проекций интегральных многообразий на подвижное пространство угловых скоростей. Дана полная классификация возможных типов этих поверхностей и указаны характерные свойства подвижных годографов для различных констант интегралов, соответствующих невырожденным движениям гироскопа.

1. Для случая, найденного С.В.Ковалевской [7], запишем уравнения движения и их интегралы в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} 2\dot{p} &= qr, \quad 2\dot{q} = -(rp + \nu_3), \quad \dot{r} = \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 &= h, \quad 2(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 = g, \\ (\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 &= k^2, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку уравнения (1),(2) инвариантны относительно преобразований $k \rightarrow -k$, $(p, q, \nu_3, g) \rightarrow (-p, -q, -\nu_3, -g)$, будем считать в дальнейшем, что

$$k \geq 0, \quad g \geq 0. \quad (3)$$

Критические значения интегралов (2) принадлежат множеству

$$\begin{aligned}
 B &= \bigcup_{i=1}^4 B_i \subset \mathbf{R}^3(h, k, g), \\
 B_1 &= \{h, k, g : k = 0\}, \quad B_2 = \{h, k, g : g^2 = 2(h + k)\}, \\
 B_3 &= \{h, k, g : g^2 = 2(h - k)\}, \\
 B_4 &= \{h, k, g : \frac{27}{4}g^2 = h(9 - 9k^2 + h^2) \pm (3k^2 - 3 + h^2)^{\frac{3}{2}}\},
 \end{aligned} \tag{4}$$

состоящему из листов поверхности кратных корней "характеристического" полинома пятой степени [1,9]. Геометрические свойства поверхностей (4) в пространстве констант первых интегралов изучены в [6]. Из результатов [6] следует, что части поверхностей B_i , отвечающие действительным решениям (1), разбивают область изменения параметров (h, k, g) , ограниченную (3), на семь непересекающихся связанных подобластей $\Omega_0, \dots, \Omega_6$. Пусть Ω_0 состоит из различных троек (h, k, g) , для которых движений нет. Подобластям $\Omega_1, \dots, \Omega_6$ соответствуют независимые интегралы (2). Совместный уровень первых интегралов определяет в фазовом пространстве $M = \mathbf{R}^3 \times S^2$ интегральное многообразие $J_{h,k,g}$, состоящее из одной, двух или четырёх связанных компонент – двумерных торов [9].

Рассмотрим проекцию пространства M на первый сомножитель, тогда отображение $pr_1 : \mathbf{R}^3 \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определяет поверхность $P_{h,k,g}$ как образ многообразия $J_{h,k,g} : P_{h,k,g} = pr_1(J_{h,k,g})$. Поверхность $P_{h,k,g}$ при фиксированных значениях (h, k, g) будем называть P -поверхностью. Любая компонента P -поверхности заполнена подвижными годографами угловой скорости, при этом каждая траектория-годограф либо всюду плотна (несоизмеримые частоты), либо замкнута (соизмеримые частоты).

Уравнение P -поверхности находим из интегралов (2) исключением ν_i [2]:

$$(E^2 + F^2)r^4 + 2(FG - 2E^2V^2q^{-2})r^2 + G^2 = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 E &= \text{Im}R(p + iq), \quad F = \text{Re}R(p + iq), \quad R(x) = -x^4 + 2hx^2 + 2gx + 1 - k^2, \\
 G &= \frac{1}{4}q^{-2}E^2 + 4q^2[(2p^2 - h)^2 - k^2], \quad 4V^2 = -(p^2 + q^2)^2 + 2h(p^2 + q^2) + 2gp + 1 - k^2.
 \end{aligned}$$

В этих обозначениях зависимость переменных Ковалевской от (p, q) запишем в виде

$$s_1 = h + \frac{\sqrt{E^2 + F^2} - 4V^2}{4q^2}, \quad s_2 = h - \frac{\sqrt{E^2 + F^2} + 4V^2}{4q^2}. \tag{6}$$

Семейства кривых $s_i = \text{const}$ образуют на плоскости $\mathbf{R}^2(p, q)$ систему криволинейных ортогональных координат, которая упрощает исследование проекций подвижного годографа [5]. Проекцией P -поверхности на $\mathbf{R}^2(p, q)$ является область, ограниченная кривыми

$$s_1 = e_5, \quad s_1 = e_4, \quad s_2 = e_4, \tag{7}$$

где $e_5 = h + k$, $e_4 = h - k$. В типичном случае связная компонента этой области диффеоморфна кольцу либо прямоугольнику в зависимости от принадлежности тройки (h, k, g) той или иной подобласти Ω_i [1] (см. рис.1: а) $(h, k, g) \in \Omega_1$; б) $(h, k, g) \in \Omega_2$; в) $(h, k, g) \in \Omega_3 \cup \Omega_5$; г) $(h, k, g) \in \Omega_4$; д) $(h, k, g) \in \Omega_6$). В каждую внутреннюю точку

областей, заштрихованных на рис. 1, проектируются четыре различные точки интегрального многообразия $J_{h,k,g}$. Соответствующие точки P -поверхности могут попарно совпадать.

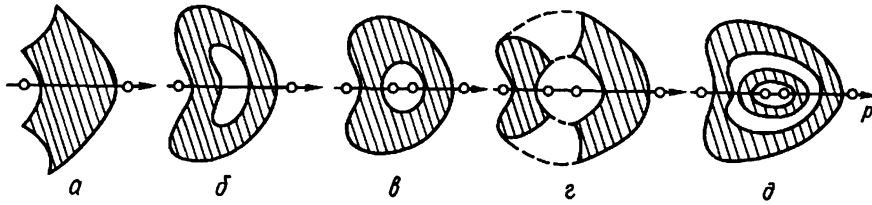


Рис. 1

Из уравнения (5) следует [2], что особые точки P -поверхности (двойные точки, точки ветвления и т.д.) удовлетворяют соотношениям

$$E \equiv 4q(pq^2 - p^3 + hp + g/2) = 0, \quad Fr^2 + G = 0, \quad (8)$$

либо

$$G \equiv 4(pq^2 - p^3 + hp + g/2)^2 + 4q^2[(2p^2 - h)^2 - k^2] = 0, \quad r = 0. \quad (9)$$

2. Исследуем кривые, описываемые в $\mathbf{R}^3(p, q, r)$ уравнениями (8), (9). Кривая (8) состоит из нескольких ветвей. Положим в соотношениях (8) $q \equiv 0$, тогда $r^2 = \frac{R'(p)}{4R(p)}$ — уравнение плоской кривой. Если $q \neq 0$, то из уравнения $E = 0$ находим $q^2 = -\frac{R'(p)}{4p}$. Эти ветви кривой (8) не лежат в плоскости. Запишем уравнение $E = 0$ с помощью (6) и тождества [5] $V^2 = \frac{1}{4}F - 2p^2q^2 + hq^2$ в виде

$$4q^2\sqrt{(s_1 - 2p^2)(2p^2 - s_2)} = 0. \quad (10)$$

На плоскости $\mathbf{R}^2(p, q)$ рассмотрим кривые

$$E_0 = \{p, q : q = 0, R(p) \geq 0\}, \quad E_1 = \{p, q : 2p^2 = s_1\}, \quad E_2 = \{p, q : 2p^2 = s_2\},$$

где s_i вычислены по формулам (6). Если $(h, k, g) \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$ (все корни $R(p) = 0$ действительны), тогда любая ветвь кривой (8) отвечает одному из множеств E_i . Множества E_1 и E_2 не имеют общих точек. Если $(h, k, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ (два корня уравнения $R(p) = 0$ действительны), то пересечение E_1, E_2 не пусто, общая точка E_1, E_2 (для нее имеем $s_1 = s_2$) лежит вне области действительных движений на $\mathbf{R}^2(p, q)$. В этом случае существуют ветви кривой $E = 0$, состоящие из точек множеств E_1, E_2 . Вид кривой (8) также зависит от числа действительных корней уравнения $R'(p) = 0$. Для кратного корня полинома $R'(p)$ находим зависимость между h, g :

$$g^2 = \frac{16}{27}h^3. \quad (11)$$

Различные типы проекций кривой (8) на плоскость $\mathbf{R}^2(p, q)$ показаны на рис. 2: a — действительны все корни уравнений $R(p) = 0$ и $R'(p) = 0$; $б$ — действителен один из

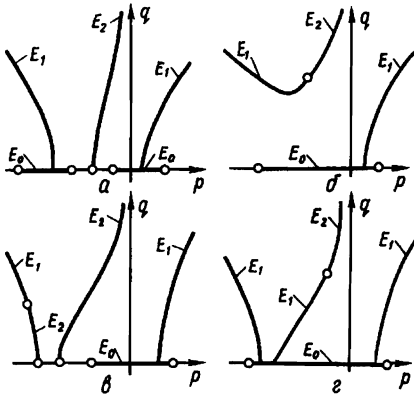


Рис. 2

корней $R'(p) = 0$; v, z – действительны все корни $R'(p) = 0$. Кривые E_i симметричны относительно оси Op , поэтому случай $q < 0$ получим зеркальным отображением рис. 2 на нижнюю полуплоскость.

Справедливы следующие свойства: если кривая E_1 (E_2) пересекает некоторую кривую $s_1 = a = \text{const}$ ($s_2 = a$), то в точке пересечения имеем $2p^2 = a$; касательная к кривой $s_1 = a$ ($s_2 = a$) в этой точке параллельна оси Oq . Точка (p, q) , не лежащая на оси $q = 0$, в которой касательная к кривой $s_i = a$ параллельна Oq , принадлежит кривой E_i . В частном случае (7) получим: если кривая E_1 пересекает $s_1 = e_5$ ($s_1 = e_4$), то в точке пересечения $2p^2 = e_5$

($2p^2 = e_4$); кривая E_2 может пересекать $s_2 = e_4$ только при $p = -\sqrt{e_4/2}$.

Сечение P -поверхности плоскостью $r = 0$ является частью кривой (9). Первое уравнение (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}G &\equiv [pq^2 + \frac{1}{4}R'(p)]^2 + q^2[(2p^2 - h)^2 - k^2] \equiv \\ &\equiv [pq^2 - \frac{1}{4}R'(p)]^2 + q^2(2gp + h^2 - k^2) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения

$$p_* = \frac{k^2 - h^2}{2g}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{h+k}{2}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{h-k}{2}}. \quad (13)$$

Из соотношений (12) находим следующие ограничения:

$$p \leq p_*, \quad p_2^2 \leq p^2 \leq p_1^2. \quad (14)$$

При любом фиксированном значении $p \neq 0$, удовлетворяющем неравенствам (14), уравнение (12) имеет четыре действительных корня. Если значение $p = 0$ удовлетворяет условиям (14), то кривая, описываемая (9), уходит в бесконечность, имея ось Oq своей асимптотой. Из соотношений (12) следует, что кривой (9) принадлежат точки оси Op – корни $R'(p) = 0$, удовлетворяющие (14). Через точку пересечения кривой (9) с осью Op проходит кривая (8). Запишем выражение для r в виде

$$r = \frac{\sqrt{2}}{s_1 - s_2} \left\{ \sqrt{(2p^2 - s_2)(e_5 - s_1)(s_1 - e_4)} + \sqrt{(s_1 - 2p^2)(e_5 - s_2)(e_4 - s_2)} \right\}. \quad (15)$$

Найдем общие точки кривых (7), (9). Приравнивая нулю левую часть (15), получаем, что кривая (9) проходит через точки $\{p, q : s_1 = e_5 \cap s_2 = e_4\}$ (эти точки плоскости $r = 0$ принадлежат P -поверхности, когда $(h, k, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_4$). Кроме того, кривая (9) может касаться кривой $s_1 = e_5$ ($s_2 = e_4$), если $p = \pm p_1 \leq p_*$ ($p = -p_2 \leq p_*$). В этом случае через точки касания всегда проходит кривая (8). Возможные типы кривой (9) для $q \geq 0$ показаны на рис. 3: $a, d - p_* > p_1$; $b, e - p_1 > p_* > 0$; $v, ж - 0 > p_* > -p_2$; $z -$

$(-p_2 > p_* > -p_1)$. Кривую (9) для $q < 0$ получим зеркальным отображением рис. 3 на нижнюю полуплоскость.

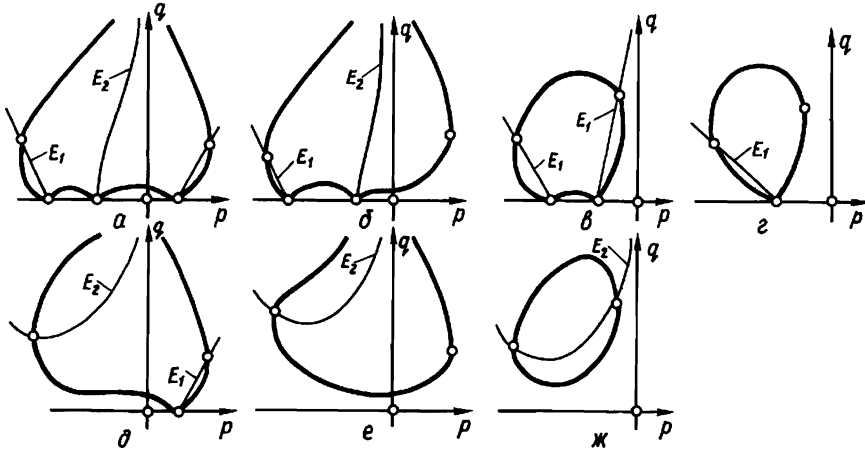


Рис. 3

3. Число различных точек P -поверхности, проектируемых в любую внутреннюю точку области действительных движений (см. рис. 1), изменяется лишь на кривых (9), (10). Поэтому для полной классификации возможных типов P -поверхностей достаточно на плоскости $\mathbf{R}^2(p, q)$ изучить зависящее от h, k, g совместное расположение кривых (9), (10) в областях, ограниченных кривыми (7). Полученные при такой классификации условия вида $f_i(h, k, g) = 0$ будем называть разделяющими поверхностями в $\mathbf{R}^3(h, k, g)$. Разделяющие поверхности разбивают $\Omega_i \subset \mathbf{R}^3$ на конечное число связных открытых областей, в каждой из которых вид сингулярной поверхности качественно не меняется.

Получим уравнения разделяющих поверхностей. Из условия $p_*^2 = p_1^2$, связывающего величины (13), находим уравнение поверхности

$$C_1 = \{h, k, g : g^2 = \frac{1}{2}(h+k)(h-k)^2\}.$$

Два листа поверхности C_1 , соответствующие значениям $\pm p_1$, будем обозначать C_1^+, C_1^- . Лист C_1^+ пересекает области Ω_1, Ω_4 ($h < k$); лист C_1^- — области $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6$ ($h > k$). Луч $g = 0, h = k \geq 0$ принадлежит обоим листам. Из условия $p_* = -p_2$ находим

$$C_2 = \{h, k, g : g^2 = \frac{1}{2}(h-k)(h+k)^2\},$$

поверхность C_2 является разделяющей только в областях Ω_2, Ω_6 . Соотношению (11) отвечает поверхность

$$C_3 = \{h, k, g : g^2 = \frac{16}{27}h^3\},$$

которая пересекает области Ω_1, Ω_2 . Заметим, что разделяет различные типы P -поверхности только та часть поверхности C_3 , для которой кратный корень $R'(p)$ расположен между действительными корнями $R(p)$. Граничную кривую на C_3 запишем в параметрической форме:

$$h = 3p^2, \quad k = \sqrt{1 - 3p^4}, \quad g = -4p^3, \quad p \in [-3^{-\frac{1}{4}}, 0], \quad (16)$$

она соответствует трёхкратному корню $R(p)$ и принадлежит бифуркационной поверхности B_4 .

Используем (6) для записи уравнений (7) в виде

$$q^2 = k - p^2 - ge_5^{-1}p \pm e_5^{-1}\sqrt{(e_5 - g^2/2)(e_5 - 2p^2)}, \quad (17)$$

$$q^2 = -k - p^2 - ge_4^{-1}p \pm e_4^{-1}\sqrt{(e_4 - g^2/2)(e_4 - 2p^2)}. \quad (18)$$

Для $(h, k, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_4$ точки пересечений кривых (17), (18) – угловые точки четырёхугольников на рис. 1 – всегда принадлежат P -поверхности. Пусть точка пересечения кривых (17), (18) удовлетворяет дополнительному условию $p = \pm p_1 \equiv \pm\sqrt{e_5/2}$. Исключив q из (17), (18), находим уравнение поверхности

$$C_4 = \{h, k, g : g = \pm[2k - \sqrt{1 + 2k(h + k)}]\sqrt{2(h + k)}\}.$$

Листы C_4^+ , C_4^- , соответствующие значениям $p = \pm p_1$, пересекаются только на кривой $g = 0$, $h = k - (2k)^{-1}$. Пусть теперь точка пересечения кривых (17), (18) удовлетворяет условию $p = -p_2 = -\sqrt{e_4/2}$. Находим уравнение поверхности

$$C_5 = \{h, k, g : g = [2k \pm \sqrt{1 - 2k(h - k)}]\sqrt{2(h - k)}\},$$

которое следует использовать только для $(h, k, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_4$.

Пусть $(h, k, g) \in \Omega_1$, тогда компонента E_1 кривой $E = 0$ (см. рис. 2, б) может пересекать кривую $s_2 = e_4$. Уравнение разделяющей поверхности получим из условия касания кривых $E = 0$ и $s_2 = e_4$. Исключив q из уравнений (8), (18), находим, что в точке пересечения p является корнем уравнения

$$f(p) = -4e_4p^4 - 4gp^3 + 2(e_4^2 - 1)p^2 + 2ge_4p + g^2/2 = 0.$$

Касанию кривых соответствует кратный корень $f(p)$. Из соотношений $f(p) = f'(p) = 0$ находим зависимость между величинами e_4, g в параметрической форме: $g = -4p^3$, $e_4 = 3p^2 - \sqrt{1 - 3p^4}$, $p \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$. Разделяющая поверхность

$$C_6 = \{h, k, g : h - k = 3p^2 - \sqrt{1 - 3p^4}, g = -4p^3, p \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]\}$$

пересекает C_3 , если p является трёхкратным корнем уравнения $R(p) = 0$. Существует дополнительное ограничение для C_6 : точка касания кривых E_1 и $s_1 = e_4$ должна принадлежать области действительных движений.

Для изучения совместного расположения поверхностей B_i, C_i в $\mathbf{R}^3(h, k, g)$ рассмотрим их сечения плоскостями вида $k = \text{const}$. Взаимное расположение сечений поверхностей (4) плоскостями $k = k_0$ качественно не меняется для различных k_0 , принадлежащих одному из интервалов $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, \infty)$ [6]. На рис. 4 показаны сечения разделяющих поверхностей плоскостями $k = k_0$: а) $k_0 \in (0, \frac{1}{2})$; б) $k_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$; в) $k_0 \in (1, \infty)$. Если разделяющие поверхности C_2, C_3 касаются (рис. 4, а), то из уравнений поверхностей находим, что их общая кривая лежит в плоскости $h = 3k$. Когда поверхность C_5 касается B_2 и когда C_4^- касается поверхности B_3 , константы интегралов связаны соотношением

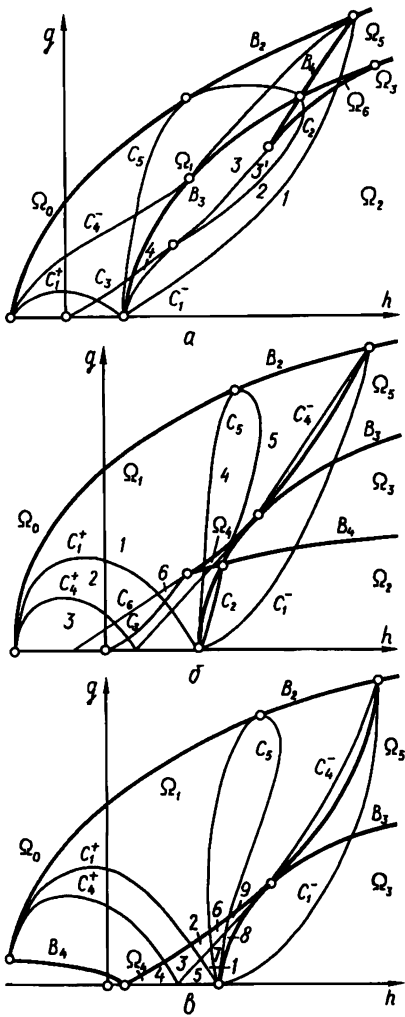


Рис. 4

каждая компонента P -поверхности является сингулярной поверхностью рассмотренного типа. Доказательство строится следующим образом. Области $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6$ пересекаются только поверхностями C_1^-, C_2, C_3 . Следовательно, двойными линиями P -поверхности могут являться ветви кривой (9) – объединение двух топологических окружностей (см. рис. 3, в, г, ж) и участки кривой (8), проектирующиеся на E_0, E_1, E_2 . На рис. 5 изображены возможные проекции P -поверхностей для области Ω_2 ; для областей Ω_3, Ω_5 возможны лишь проекции а, б; для области Ω_6 – проекции а, б, в. Двойные линии, состоящие из ветвей кривой (9), и участки кривой (8), проектирующиеся на E_1 , соответствуют пересечению различных компонент P -поверхности и не влияют на тип компоненты. Каждая компонента P -поверхности, рассматриваемая изолированно, имеет тот же тип, что и поверхность на рис. 5, а. Заметим, что прообразы компонент P -поверхностей – двумерные торы из $J_{h,k,g} \subset M$ – не пересекаются.

Если $(h, k, g) \in \Omega_1$, то различных типов P -поверхностей значительно больше. В этом случае $J_{h,k,g}$ состоит из одной связной компоненты, поэтому перестройки в множестве особых точек P -поверхности приводят к изменению её типа. Пусть i – номер подобласти в Ω_1 (см. рис. 4, б), тогда эту подобласть обозначим через $\Omega_{1/i}$. Для $(h, k, g) \in \Omega_{1/1}$ тип P -поверхности отличается от рассмотренного ранее лишь тем, что ось "тора"

$h^2 = k^2 + 1$. Уравнения линий касания легко находятся из (4). На рис. 4, а отмечены области, на которые Ω_2 разбивается разделяющими поверхностями C_1, \dots, C_6 ; на рис. 4, б пронумерованы области, входящие в Ω_1 (этот список областей можно дополнить, так как некоторые области из Ω_1 не пересекаются выбранной плоскостью); на рис. 4, в отмечены все области, входящие в Ω_4 .

4. Разделяющие поверхности C_1, \dots, C_6 позволяют установить возможные типы P -поверхностей для невырожденных движений гироскопа и классифицировать их. Укажем основные результаты исследования типов P -поверхностей.

Пусть $(h, k, g) \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$. В каждой из областей $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6$ существует подобласть, в которой проекция на $\mathbb{R}^2(p, q)$ связной компоненты P -поверхности имеет вид, изображённый на рис. 5, а. Сечения этих подобластей на рис. 4 расположены справа от C_1^- . Дуги кривой (8), проектирующиеся на E_0, E_2 (рис. 5, а), образуют на связной компоненте P -поверхности четыре двойные линии. Оба конца каждой двойной линии являются точками ветвления типа конуса над восьмёркой. Такого вида тор с "перетяжками" уже встречался при исследовании P -поверхностей в случае нулевой постоянной площадей [3] и в решении Горячева–Чаплыгина [4].

При любых значениях $(h, k, g) \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$ тип сингулярной поверхности, несущей подвижный годограф угловой скорости, не изменяется;

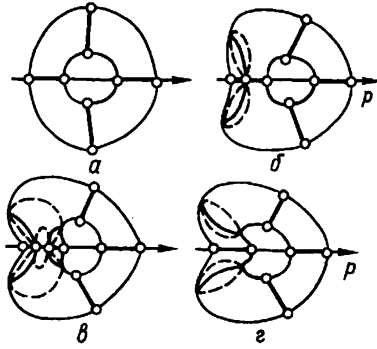


Рис. 5

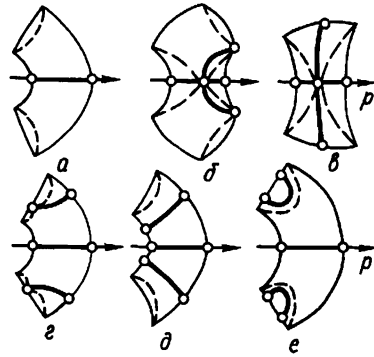


Рис. 6

служит барицентрическая ось Op . P -поверхность симметрична относительно плоскостей $r = 0$ и $q = 0$, в этих плоскостях лежат четыре двойные линии P -поверхности – дуги кривых (8), (9). Проекция поверхности подвижного годографа на плоскость $\mathbf{R}^2(p, q)$ изображена на рис. 6, а. В любую внутреннюю точку четырёхугольника (кроме точек кривых $G = 0, E_0$) проектируются четыре различные точки P -поверхности, а в точку на границе – только две точки.

Области $\Omega_{1/1}, \Omega_{1/2}$ разделяет поверхность C_1^+ (см. рис. 4, б). Если $(h, k, g) \in \Omega_{1/2}$, то ветви кривой (9) пересекаются (рис. 6, б). Следовательно, барицентрическая ось всегда пересекает P -поверхность, а проекция P -поверхности на любую плоскость в $\mathbf{R}^3(p, q, r)$ будет односвязной областью. Для $(h, k, g) \in \Omega_{1/3}$ самопересечения ещё больше усложняют вид P -поверхности. Пусть $R'(p_0) = 0$, тогда в точке $(p, q, r) = (p_0, 0, 0)$ пересекаются шесть двойных линий P -поверхности (рис. 6, в). Такого типа поверхности существуют и при нулевой постоянной площадей (для сравнения см. рис. 4, б в работе [3]). Точка $(h, k, g) = (-1, 1, 0)$, соответствующая устойчивому положению равновесия гироскопа, принадлежит $\partial\Omega_{1/3}$. Таким образом, случай $(h, k, g) \in \Omega_{1/3}$ позволяет выяснить вид подвижного годографа в окрестности устойчивого положения равновесия.

Сопоставление проекций P -поверхности, отвечающих областям $\Omega_{1/1}, \Omega_{1/4}, \Omega_{1/5}$ (см. рис. 6 а, г, д), показывает, как появляются на P -поверхности ещё четыре "перетяжки". Новые двойные линии симметричны относительно плоскостей $\mathbf{R}^2(p, q)$ и $\mathbf{R}^2(p, r)$, их проекции на $\mathbf{R}^2(p, q)$ принадлежат множеству E_2 , концы двойных линий являются точками ветвления. Области $\Omega_{1/1}, \Omega_{1/6}$ разделяет поверхность C_6 . Кривые $E_i, G = 0$ и проекция P -поверхности на плоскость $\mathbf{R}^2(p, q)$ для $(h, k, g) \in \Omega_{1/6}$ изображены на рис. 6, е.

Если $(h, k, g) \in \Omega_4$, то интегральное многообразие состоит из двух торов, а P -поверхность – из двух связных компонент. В области Ω_4 возможны лишь те типы P -поверхностей, которые уже рассматривались в случае $(h, k, g) \in \Omega_1$. Для $(h, k, g) \in \Omega_4$ существуют различные комбинации типов поверхностей, проекции которых показаны на рис. 6: $\Omega_{4/1}$ (см. рис. 4, б) отвечают типам а, б; $\Omega_{4/2}$ – типам а, в; $\Omega_{4/3}$ – типам б, в и т.д.

5. Системе изотермических координат $s_i = \text{const}$ соответствуют два семейства замкнутых кривых, принадлежащих P -поверхности. Две кривые одного и того же семейства $s_1 = \text{const}$ ($s_2 = \text{const}$) не имеют взаимных пересечений. Подвижный годограф угловой скорости последовательно пересекает все кривые, принадлежащие P -поверхности.

Через регулярную точку P -поверхности проходит лишь одна траектория подвижного годографа; каждую точку двойной линии траектории пересекают дважды; через

точку P -поверхности, в которой пересекаются двойные линии (8), (9), проходит не более четырёх различных траекторий. Более детальное изучение подвижного годографа требует анализа числа вращения [8], равного отношению двух ультраэллиптических квадратур, содержащих параметры h, k, g .

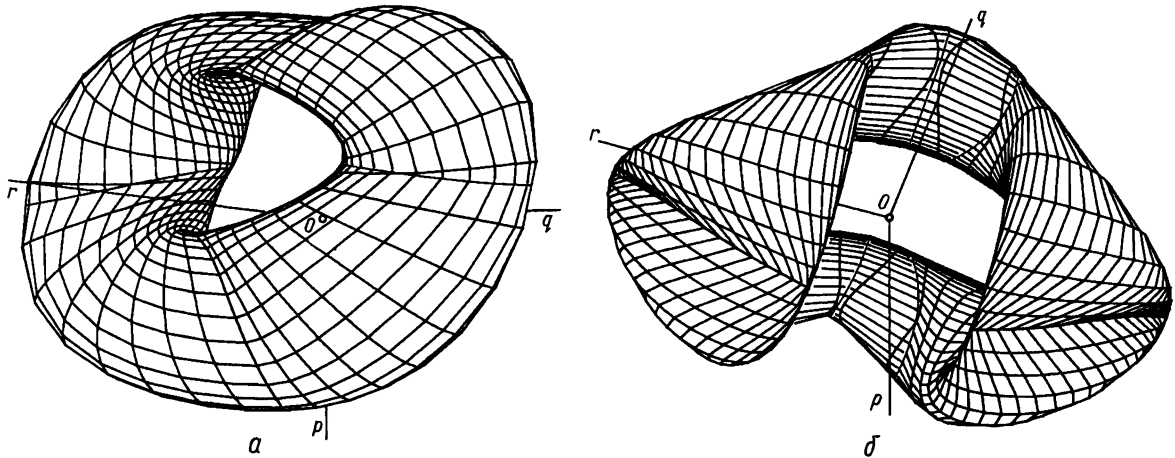


Рис. 7

Для областей $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6$ P -поверхность охватывает ось, лежащую в плоскости $\mathbf{R}^2(p, r)$, а изменение величины s_2 характеризует вращение вектора угловой скорости вокруг этой оси. Для областей Ω_1, Ω_4 осью симметрии служит барицентрическая ось Op . Если P -поверхность и ось Op не пересекаются ($\Omega_{1/1}, \Omega_{1/4}, \Omega_{1/6}$ и т.д.), то подвижный годограф "обматывает" ось Op . Изменение величины s_2 характеризует вращение вектора угловой скорости вокруг оси Op . На рис. 7 показаны две P -поверхности для (h, k, g) , принадлежащих областям Ω_3, Ω_4 . Их проекции на плоскость $\mathbf{R}^2(p, q)$ изображены на рис. 5, а и рис. 6, д.

1. Апфельрот Г.Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сб., посвященный памяти С.В.Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–155.
2. Гашененко И.Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 1–10.
3. Гашененко И.Н. Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей // Там же. – 1993. – Вып. 25. – С. 7–16.
4. Гашененко И.Н. Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Горячева – Чаплыгина // Там же. – 1986. – Вып. 18. – С. 3–9.
5. Жуковский Н.Е. Геометрическая интерпретация рассмотренного С.В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Собр. соч.: В 7 т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1 – С. 294–338.
6. Ипатов А.Ф. Движение гироскопа С.В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности // Уч. зап. Петрозав. ун-та. – 1970. – 18, Вып. 2. – С. 6–93.
7. Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Науч. работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.
8. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 232 с.
9. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.