

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

УДК 531.38

**ГАШЕНЕНКО Игорь Николаевич**

**ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ  
И МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ СКОРОСТЕЙ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико - математических наук

Научный консультант:

**Харламова Елена Ивановна**

доктор физ. - мат. наук, профессор

Донецк — 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
<b>РАЗДЕЛ 1. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ</b>	15
1.1. Дифференциальные уравнения движения	15
1.2. Гиростат	20
1.3. Обзор литературы	24
1.4. Общая методика исследования	27
1.5. Выводы	38
<b>РАЗДЕЛ 2. РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ГИРОСТАТА</b>	40
2.1. Понижение порядка системы Эйлера–Пуассона	40
2.1.1 Специальные оси и уравнения П.В. Харламова	40
2.1.2 Уравнения В. Гесса	43
2.1.3. Углы Эйлера и канонические переменные для специальных осей	47
2.1.4. Частные формы динамических уравнений	48
2.1.5. Переменные Андуайе–Депри для специальных осей	50
2.2. Понижение порядка уравнений движения гиростата	54
2.2.1 Уравнения Гесса для гиростата	55
2.2.2 Уравнения движения гиростата в переменных Андуайе–Депри	58
2.3. Выводы	60
<b>РАЗДЕЛ 3. ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА</b>	61
3.1. Бифуркационное множество задачи о движении тяжелого твердого тела	61
3.1.1. Равномерные вращения тела вокруг вертикали	61
3.1.3. Бифуркационное множество в случае $A_1 > A_2$ , $r_3 = 0$	63

3.1.4. Классификация бифуркационных диаграмм	69
3.2. Интегральные многообразия уравнений Эйлера–Пуассона	75
3.2.1. Классификация многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$	75
3.2.2. Замечания об устойчивости равномерных вращений	78
3.3. Выводы	81
<b>РАЗДЕЛ 4. ОГИБАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ДОПУСТИМЫЕ СКОРОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА</b>	82
4.1. Огибающая поверхность	82
4.1.1. Образы интегральных многообразий в пространстве $\mathbb{R}^3(\omega)$	83
4.1.2. Топология поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$	84
4.1.3. Топология и бифуркации $\partial\mathcal{V}_{h,g}$	89
4.2. Бифуркации многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ внутри изоэнергетической поверхности $\mathcal{E}_h^4$	93
4.2.1. Параметризация кривой $\partial\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2$ и поверхности $\partial\mathcal{V}_{h,g} \subset \mathbb{R}^3$	94
4.3. Сечение Пуанкаре	98
4.3.1. Глобальное сечение в виде компактного многообразия	98
4.3.2. Фазовое сечение в канонических переменных	100
4.4. Выводы	102
<b>РАЗДЕЛ 5. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА</b>	104
5.1. Частные решения задачи о движении тела вокруг неподвижной точки	104
5.1.1. Предварительные замечания	104
5.1.2. Центр масс тела принадлежит главной оси инерции	106
5.1.3. Центр масс тела принадлежит главной плоскости инерции	114
5.2. Неустойчивый физический маятник	118
5.2.1. Канонические переменные Андуайе–Депри	118
5.2.2. Новые канонические переменные	120
5.2.3. Частные решения гамильтоновой системы	122

5.2.4. Интеграл Мельникова	126
5.2.5. Асимптотически маятниковые движения в случае Гесса	128
5.3. Выводы	130
<b>РАЗДЕЛ 6. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ КОВАЛЕВСКОЙ</b>	132
6.1. Подвижные годографы угловой скорости в решении С.В. Ковалевской	132
6.1.1. Инвариантные торы и их проекции в $\mathbb{R}^3(\omega)$	132
6.1.2. Анализ двойных линий в $\mathbb{R}^3(\omega)$	137
6.1.3. Уравнения разделяющих поверхностей	140
6.1.4. Классификация сингулярных поверхностей	143
6.1.5. Семейство характеристик на $\partial V_{h,g}$	147
6.1.6. Свойства годографов угловой скорости	148
6.2. Движение волчка Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей	150
6.2.1. Исходные соотношения	150
6.2.2. Простейшие движения гироскопа	151
6.2.3. Асимптотические движения	153
6.2.4. Периодичность при асимптотических движениях волчка	158
6.2.5. Невырожденные движения гироскопа	159
6.2.6. Двухчастотные квазипериодические движения	161
6.3. Выводы	163
<b>РАЗДЕЛ 7. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОВАЛЕВСКОЙ И МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА</b>	164
7.1. Асимптотический метод в задаче о движении тела с неподвижной точкой	164
7.1.1. Введение	164
7.1.2. Интегрируемые случаи	166
7.1.3. Мероморфные решения	169

7.1.4. Показатели Ковалевской	172
7.1.5. Ряды Пюизе и частные решения уравнений Эйлера–Пуассона	175
7.2. Теорема о степенных разложениях решений	179
7.2.1. Осесимметричный случай $A_1 = A_2$	183
7.3. Применение методов степенной геометрии к уравнениям Ковалевского	186
7.3.1. Постановка задачи	186
7.3.2. 16 семейств частных решений	189
7.4. Выводы	192
<b>РАЗДЕЛ 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ДОПУСТИМЫЕ СКОРОСТИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА</b>	193
8.1. Бифуркации уровней первых интегралов задачи о движении тяжелого гиростата	193
8.1.1. Введение	193
8.1.2. Конус Штауде	195
8.1.3. Параметризация равномерных вращений	198
8.1.4. Бифуркационные диаграммы	203
8.1.5. Центр масс принадлежит главной оси инерции	205
8.1.6. Классификация бифуркационных диаграмм	208
8.1.7. Интегральные многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$	214
8.1.8. Общие уравнения бифуркационных кривых	217
8.2. Огибающие поверхности в задаче о движении тяжелого гиростата	219
8.2.1. Фазовые сечения $\mathcal{P}_{h,g}^2$ и их бифуркации	219
8.2.2. Топология поверхности $\mathcal{P}_{h,g}^2$	223
8.2.3. Огибающая поверхность в $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$	225
8.2.4. Соответствие между $\partial\mathcal{V}_{h,g}$ , $\mathcal{P}_{h,g}^2$ и $\mathcal{Q}_{h,g}^3$	229
8.2.5. Семейство характеристик на $\partial\mathcal{V}_{h,g}$	233
8.3. Выводы	235

<b>РАЗДЕЛ 9. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ</b>	
<b>ГИРОСТАТА ПРИ УСЛОВИЯХ КОВАЛЕВСКОЙ</b>	<b>236</b>
9.1. Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата	236
9.1.1. Уравнения движения	236
9.1.2. Частный случай кратных корней	239
9.1.3. Интегрирование уравнений и классификация решений	242
9.2. Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской	244
9.3. Интегральные многообразия и топологические инварианты гиростата Ковалевской	252
9.3.1. Области возможности движений	252
9.3.2. Симметрии	254
9.3.3. Проекции инвариантных торов	256
9.3.4. Топологические инварианты	258
9.4. Выводы	261
<b>ВЫВОДЫ</b>	<b>263</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>266</b>

РАЗДЕЛ 9  
ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПРИ  
УСЛОВИЯХ КОВАЛЕВСКОЙ

**9.1 Один случай интегрируемости уравнений  
движения гиростата**

В задаче о движении тяжелого гиростата [297], распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской [131], а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии, аналитически исследовано частное решение, полученное при одном дополнительном ограничении на параметры. В этом случае интегрирование уравнений движения сводится к эллиптическим квадратурам, а гиростат может совершать квазипериодические и асимптотические движения.

**9.1.1 Уравнения движения**

Уравнения движения тяжелого гиростата

$$\begin{aligned} A_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + (r_2\nu_3 - r_3\nu_2)\Gamma, \\ \frac{d\nu_1}{dt} &= \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3 \quad (123) \end{aligned} \tag{9.1}$$

при условиях  $A_1 = A_2 = 2A_3$ ,  $r_2 = r_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $\Gamma > 0$  запишем в безразмерных переменных. Введем следующие обозначения

$$p = \omega_1 \sqrt{\frac{A_3}{\Gamma}}, \quad q = \omega_2 \sqrt{\frac{A_3}{\Gamma}}, \quad r = \omega_3 \sqrt{\frac{A_3}{\Gamma}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_3}{\sqrt{A_3\Gamma}}, \quad \tilde{t} = t \sqrt{\frac{\Gamma}{A_3}}, \tag{9.2}$$

тогда дифференциальные уравнения (9.1) примут вид

$$\begin{aligned} 2\dot{p} &= (r - \lambda)q, \quad 2\dot{q} = -(r - \lambda)p - \nu_3, \quad \dot{r} = \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \end{aligned} \tag{9.3}$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tilde{t}$ . Система уравнений (9.3) допускает четыре первых интеграла:

$$\begin{aligned} H &= p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 = h, \\ K &= (\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 + \\ &\quad + 2\lambda[(r - \lambda)(p^2 + q^2) + 2p\nu_3] = k, \\ G &= 2(p\nu_1 + q\nu_2) + (r + \lambda)\nu_3 = g, \\ I &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Х.М. Яхья [297] первым обобщил классический интеграл Ковалевской на задачу о движении гиростата. Затем И.В. Комаров опубликовал тот же интеграл  $K$  в работе [266].

В комплексных переменных Ковалевской [131]

$$\begin{aligned} x_1 &= p + iq, \quad \xi_1 = x_1^2 + \nu_1 + i\nu_2, \\ x_2 &= p - iq, \quad \xi_2 = x_2^2 + \nu_1 - i\nu_2, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \tag{9.5}$$

интегралы (9.4) перепишем так:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2h + \xi_1 + \xi_2 - (x_1 + x_2)^2, \\ (r + \lambda)\nu_3 &= g - x_2\xi_1 - x_1\xi_2 + x_1x_2(x_1 + x_2), \\ \nu_3^2 &= 1 - \xi_1\xi_2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2 - x_1^2x_2^2, \\ 2\lambda[(r - \lambda)x_1x_2 + (x_1 + x_2)\nu_3] &= k - \xi_1\xi_2. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Два первых уравнения из (9.3) примут вид

$$2i\dot{x}_1 = (r - \lambda)x_1 + \nu_3, \quad -2i\dot{x}_2 = (r - \lambda)x_2 + \nu_3. \tag{9.7}$$

Из (9.6), (9.7) находим

$$\begin{aligned} ((r - \lambda)x_1 + \nu_3)^2 &= P(x_1) + \xi_1(x_1 - x_2)^2 + 4\lambda i(x_2 - x_1)\dot{x}_1, \\ ((r - \lambda)x_2 + \nu_3)^2 &= P(x_2) + \xi_2(x_1 - x_2)^2 + 4\lambda i(x_2 - x_1)\dot{x}_2, \\ [(r - \lambda)x_1 + \nu_3][(r - \lambda)x_2 + \nu_3] &= R(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{9.8}$$

где обозначены полиномы

$$P(x) = -x^4 + (2h - \lambda^2)x^2 + 2gx + 1 - k,$$

$$R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + (2h - \lambda^2)x_1x_2 + g(x_1 + x_2) + 1 - k.$$

Исключив из уравнений (9.8) величины  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $r$ ,  $\nu_3$ , получим

$$\begin{aligned} 4\dot{x}_1\dot{x}_2^2 &= R(x_1, x_2), \\ \frac{4P(x_1)P(x_2)}{(x_2 - x_1)^4} &\left[ \frac{\dot{x}_1^2}{P(x_1)} + \frac{\dot{x}_2^2}{P(x_2)} \right] + \\ &+ \frac{8\lambda i\dot{x}_1}{(x_2 - x_1)^3} \left( P(x_2) - \frac{1}{4}P'(x_2)(x_2 - x_1) \right) + \\ &+ \frac{8\lambda i\dot{x}_2}{(x_2 - x_1)^3} \left( P(x_1) + \frac{1}{4}P'(x_1)(x_2 - x_1) \right) + \\ &+ \frac{R^2(x_1, x_2)}{(x_2 - x_1)^4} + \frac{P(x_1)P(x_2)}{(x_2 - x_1)^4} - \frac{4\lambda^2 R(x_1, x_2)}{(x_2 - x_1)^2} - k = 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Успех анализа Ковалевской [131] основан на введении переменных  $s_1$ ,  $s_2$ , для которых

$$\frac{dx_1}{\sqrt{P(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{P(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}}, \quad \frac{dx_2}{\sqrt{P(x_2)}} - \frac{dx_1}{\sqrt{P(x_1)}} = \frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}}, \quad (9.10)$$

где  $\varphi(s) = 0$  – одна из резольвент уравнения  $P(x) = 0$ . При ненулевом  $\lambda$  замена (9.10) не приводит к непосредственному разделению переменных в уравнениях (9.9).

Уравнения (9.9) опубликованы автором в работе [72]. Аналогичные уравнения и уравнения в переменных  $s_1$ ,  $s_2$  были получены в [267]. Формулы решений уравнений (9.3), записанные в  $\vartheta$  – функциях времени, получены в явном виде в работе [236]. Другие методы интегрирования уравнений (9.3) были предложены и обсуждались в [151, 267]. Следует заметить, что все результаты явного интегрирования уравнений движения гиростата, подчиненного условиям Ковалевской, представляют пока лишь математический интерес. Эти формулы достаточно сложны и не позволяют изучать механические свойства движения гиростата. Н.Е. Жуковскому [114] и

Г.Г. Аппельроту [6] удалось применить переменные  $s_1, s_2$  для качественного описания свойств движения волчка Ковалевской. Автор надеется, что качественные свойства гиростата Ковалевской будут изучены так же досконально.

Дальнейшее исследование начнем с важного частного случая, когда всего при одном (!) дополнительном ограничении вида  $f(h, g, k, \lambda) = 0$  дифференциальные уравнения (9.3) тривиально интегрируются в эллиптических функциях времени.

### 9.1.2 Частный случай кратных корней

Проинтегрируем (9.9) в частном случае, когда  $P(x) = 0$  имеет кратные корни. Для решения Ковалевской такое условие определяет по Аппельроту [6] *четвертый класс* простейших движений гироскопа Ковалевской. По аналогии с [114], для упрощения системы (9.9) можно перейти к новым переменным, связанным с  $x_1, x_2$  дробно-линейной подстановкой. Однако мы будем преобразовывать не уравнения (9.9), а исходную систему (9.3), как это было сделано в работе [108] для волчка Ковалевской.

Рассмотрим следующую замену переменных

$$\begin{aligned} p &= a - xM^{-1}, \quad q = -yM^{-1}, \\ r &= 2z + \lambda + 4x\gamma M^{-1}, \quad M = x^2 + y^2 \neq 0, \\ \nu_1 &= -2\alpha + 4(x^2 - y^2)\gamma^2 M^{-2} + 2ax(1 - 2ax)M^{-1} + 4\lambda x\gamma M^{-1}, \\ \nu_2 &= -2\beta + 8xy\gamma^2 M^{-2} + 2ay(1 - 2ax)M^{-1} + 4\lambda y\gamma M^{-1}, \\ \nu_3 &= 2(1 - 2ax)\gamma M^{-1} - 2az \end{aligned} \quad (9.11)$$

с вещественным параметром  $a$ , который пока произволен. Якобиан

$$\frac{D(p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3)}{D(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)} = \frac{-16}{(x^2 + y^2)^3}$$

отличен от нуля. Заменой переменных (9.11) уравнения (9.3) и их интегра-

лы (9.4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= yz, \quad \dot{y} = -xz - \gamma, \quad \dot{z} = \beta - \frac{1}{4}yP'(a), \\
\dot{\alpha} &= (2z - \lambda)\beta + y\gamma P(a) + \frac{1}{4}\lambda yP'(a), \quad \dot{\gamma} = y\alpha - x\beta, \\
\dot{\beta} &= -(2z - \lambda)\alpha - x\gamma P(a) - a^2z - \frac{1}{4}\lambda xP'(a); \\
(\alpha + a^2)x + \beta y + \gamma(z - \lambda) - \frac{1}{8}MP'(a) &= \frac{1}{2}a, \\
\alpha + \frac{1}{2}MP(a) - (z - \frac{1}{2}\lambda)^2 - \frac{1}{2}xP'(a) &= \frac{1}{2}(a^2 - h), \\
\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 P(a) + a^2z^2 - \frac{1}{2}\lambda\gamma P'(a) + \frac{1}{2}a^2xP'(a) &= \frac{1}{4}(1 + aP'(a)), \\
\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy - \gamma^2 + a^2x^2 - \lambda zM - 2\lambda xy - \frac{1}{4}M^2P(a) &= \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{9.12}$$

где обозначены полиномы

$$\begin{aligned}
P(a) &= -a^4 + a^2(2h - \lambda^2) + 2ga + 1 - k, \\
P'(a) &\equiv \frac{dP(a)}{da} = -4a^3 + 2a(2h - \lambda^2) + 2g.
\end{aligned}$$

Положим далее

$$P(a) = P'(a) = 0. \tag{9.13}$$

Одно из уравнений (9.13) определяет зависимость нового параметра  $a$  от констант интегралов (9.6), второе уравнение (9.13) задает дополнительное ограничение на параметры  $h, k, g, \lambda$ . С учетом условий (9.13) уравнения (9.12) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= yz, \quad \dot{y} = -xz - \gamma, \quad \dot{z} = \beta, \quad \dot{\alpha} = (2z - \lambda)\beta, \\
\dot{\beta} &= -(2z - \lambda)\alpha - a^2z, \quad \dot{\gamma} = y\alpha - x\beta; \\
(\alpha + a^2)x + \beta y + \gamma(z - \lambda) &= \frac{1}{2}a, \\
\alpha - (z - \frac{1}{2}\lambda)^2 &= \frac{1}{2}(a^2 - h), \quad \alpha^2 + \beta^2 + a^2z^2 = \frac{1}{4}, \\
\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy - \gamma^2 + a^2x^2 - \lambda z(x^2 + y^2) - 2\lambda x\gamma &= \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Из системы уравнений (9.14) находим замкнутую подсистему, интегрирование которой сводится к эллиптическим квадратурам:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sqrt{f(z)}, \quad \dot{\alpha} = (z - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - h), \quad \beta = \sqrt{f(z)}, \\ f(z) &= \frac{1}{4} - a^2 z^2 - [(z - \frac{1}{2}\lambda)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - h)]^2. \end{aligned} \quad (9.15)$$

В невырожденном случае переменная  $z$  колеблется между действительными корнями  $f(z)$ , переменные  $z, \alpha, \beta$  являются эллиптическими функциями времени.

Введем независимые параметры

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{16}(2h - 2a^2 - \lambda^2), \quad L_2 = \frac{1}{4}(2h - 6a^2 - \lambda^2), \\ L_3 &= 4(a^2 + \lambda^2)L_1 - \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Константы интегралов (9.4) и параметр  $\lambda$  выразим через  $L_i$ :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{32L_1}(4L_3 + 1 - 16L_1L_2 + 320L_1^2), \quad k = -48L_1^2 + 8L_1L_2 + L_2^2 + 1, \\ g^2 &= 256L_1^2(4L_1 - L_2), \quad \lambda^2 = \frac{1}{16L_1}(16L_1L_2 + 4L_3 + 1 - 64L_1^2). \end{aligned}$$

Тогда из (9.14) следуют уравнения

$$\Phi^2(z)(\dot{\eta})^2 + L_2L_3\eta^2 = L_1, \quad \eta = y\Phi^{-\frac{1}{2}}(z), \quad (9.17)$$

где функция  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi(z) = (z - \lambda)^2 - L_2.$$

Таким образом, задача интегрирования уравнений (9.3) при условиях (9.13) сведена к эллиптическим квадратурам

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} &= t - t_0, \\ \int \frac{d\eta}{\sqrt{L_1 - L_2L_3\eta^2}} + \int \frac{dz}{[(z - \lambda)^2 - L_2]\sqrt{f(z)}} &= \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Определив функцию  $\eta(z)$  из (9.15), (9.17), найдем из (9.14) выражения для остальных переменных:

$$y = \eta\Phi^{\frac{1}{2}}(z), \quad x = - \left( \frac{1}{2}aL_2^{-1} + \eta\beta\Phi^{-\frac{1}{2}}(z) + \dot{\eta}\Phi^{\frac{1}{2}}(z)(z - \lambda)L_2^{-1} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}azL_2^{-1} + \lambda\eta\beta\Phi^{-\frac{1}{2}}(z) + \dot{\eta}\Phi^{\frac{1}{2}}(z)(\alpha + a^2)L_2^{-1}.$$

Следовательно, зависимости переменных  $x, y, \gamma$  от времени выражаются посредством тэта-функций.

### 9.1.3 Интегрирование уравнений и классификация решений

При классификации решений уравнения (9.17) целесообразно разбить пространство параметров (9.16) на следующие подобласти:

- 1)  $L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 > 0$ ; 2)  $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 < 0$ ;
- 3)  $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 > 0$ ; 4)  $L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 < 0$ ;
- 5)  $L_1 < 0$ ; 6)  $L_1 = 0$ ; 7)  $L_2 = 0$ ; 8)  $L_3 = 0$ .

Общим для всех этих вариантов является решение П.В. Харламова [203, гл. 5], получающееся при стремлении  $x, y$  и  $\gamma$  к бесконечности. Это предельное решение

$$p = a, \quad q = 0,$$

$$\dot{r} = \left[ -\frac{1}{4}r^4 - (2a^2 - h)r^2 + 2\lambda a^2 r + 1 - (a^2 - h)^2 - a^2\lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.18)$$

обобщает известный случай интегрируемости Бобылева–Стеклова [17, 182], соответствующее (9.18) движение гиростата полностью изучено П.В. Харламовым [203, гл. 5].

Кроме движений, описываемых уравнениями (9.18), гиростат может совершать квазипериодические движения при выполнении условий 1), 2).

Когда  $L_i$  выбраны из подобластей 3), 4), 7), 8), движение гиростата асимптотически приближается при  $t \rightarrow \infty$  к движению по закону (9.18). В симметричном случае 6) возможны два вида движений (9.18):

$$p = a > 0, \quad p = -a < 0.$$

Проинтегрируем (9.17) в квазипериодическом случае (варианты 1), 2)). Для этого введем новую переменную  $\theta$  – монотонную функцию времени:

$$\dot{\theta} = |L_2 L_3|^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(z) > 0.$$

Пусть  $b^2 = L_1 |L_2 L_3|^{-1}$ , тогда находим

$$x = - \left( \frac{1}{2} a L_2^{-1} + b \beta \Phi^{\frac{1}{2}}(z) \sin \theta + L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{-1} \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) (z - \lambda) \cos \theta \right),$$

$$y = b \Phi^{\frac{1}{2}}(z) \cos \theta,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} a z L_2^{-1} + \lambda b \beta \Phi^{\frac{1}{2}}(z) \sin \theta + L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{-1} \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) (\alpha + a^2) \cos \theta.$$

Асимптотические движения изучим в случае 3)  $L_1 > 0$ ,  $L_2 < 0$ ,  $L_3 > 0$ .

В прежних обозначениях находим

$$x = - \left( \frac{1}{2} a L_2^{-1} + b \beta \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) \operatorname{sh} \theta + L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{-1} \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) (z - \lambda) \operatorname{ch} \theta \right),$$

$$y = b \Phi^{\frac{1}{2}}(z) \operatorname{sh} \theta,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} a z L_2^{-1} + \lambda b \beta \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) \operatorname{sh} \theta + L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{-1} \Phi^{-\frac{1}{2}}(z) (\alpha + a^2) \operatorname{ch} \theta.$$

Для полной классификации движений гиростата при условиях (9.13) нам необходимо рассмотреть также случай кратных корней многочлена  $f(z)$ .

Дискриминант полинома  $f(z)$  равен

$$\begin{aligned} D = & -4u(u+v^2)^2 + 4(v-8L_1)\lambda^6 + \\ & + 4[16u(3u-5v^2)L_1 + v(9u-14u^2+2v^2u+v^2)]\lambda^2 + \\ & + [32(9+2u)vL_1 + 24u + 4u^2 - 4v^2u - 8v^2 - 27]\lambda^4, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где  $u = 1 - 64L_1^2$ ,  $v = L_2 + 4L_1$ . Если  $z_*$  – кратный корень  $f(z)$ , то система уравнений (9.14) допускает инвариантные соотношения следующего вида:

$$z = z_*, \quad L_2L_3y^2 + (L_2x + a/2)^2(z_* - \lambda)^{-2}\Phi^2(z_*) = L_1\Phi(z_*). \quad (9.20)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что переход к исходным переменным  $p, q, r$  приводит соотношения (9.20) к частному случаю инвариантных соотношений другого решения П.В. Харламова, указанного в работе [208]. Отметим, что существуют значения параметров  $L_i$ , при которых  $D = 0$  и траектория, описываемая конечными уравнениями (9.20), является предельной для асимптотических движений гиростата.

## 9.2 Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской

В интегрируемом случае движения тяжелого гиростата [225], обобщившем решение С.В. Ковалевской [131], изучим структуру бифуркационного множества в пространстве констант первых интегралов.

Будем использовать безразмерные переменные (9.2). Постоянная  $\lambda$  характеризует величину гиростатического момента, без ограничения общности примем  $\lambda > 0$ . Заметим, что полное исследование бифуркационного множества в интегрируемом случае Ковалевской ( $\lambda = 0$ ) выполнено в работе [197].

Зафиксируем произвольное значение постоянной  $\lambda$ . Двумерная поверхность уровня первых интегралов (9.4)

$$J_{h,k,g}(\lambda) = \{H = h, K = k, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6$$

инвариантна относительно двух независимых коммутирующих векторных полей с гамильтонианами  $H, K$ . В соответствии с теоремой Лиувилля–Арнольда, неособая компактная поверхность  $J_{h,k,g}$  является объединением двумерных торов, заполненных условно–периодическими траекториями.

ми. Критические поверхности  $J_{h,k,g}$  отвечают тем значениям  $(h, k, g)$ , которые принадлежат бифуркационному множеству  $\Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$ . Они несут все особые движения и определяют характер топологических перестроек торов Лиувилля, происходящих при изменении  $(h, k, g)$ . На критических поверхностях  $J_{h,k,g}$  всегда имеются точки  $\mathbb{R}^6$ , в которых интегралы (9.4) зависимы. Подмножество критических точек найдем из следующего условия на ранг матрицы Якоби :

$$\text{rank} \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial \nu_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial I}{\partial p} & \cdots & \frac{\partial I}{\partial \nu_3} \end{vmatrix} < 4. \quad (9.21)$$

Отдельно рассмотрим особый случай, полагая в соотношениях (9.4)

$$q = 0. \quad (9.22)$$

Тогда из (9.21) находим дополнительные ограничения на переменные:

$$(r - \lambda)p + \nu_3 = 0, \quad (9.23)$$

$$\nu_2 = \frac{D(H, K, G, I)}{D(p, r, \nu_1, \nu_3)} = 0. \quad (9.24)$$

При *одновременном* выполнении равенств (9.22), (9.23) или (9.22), (9.24) условие (9.21) удовлетворяется. Это следует, например, из результатов работы П.Е. Рябова [172], который первым приступил к изучению бифуркационного множества рассматриваемой задачи.

Подстановкой (9.22), (9.23) в (9.4) находим, что полином

$$P(p) = -p^4 + (2h - \lambda^2)p^2 + 2gp + 1 - k$$

имеет кратный корень:

$$P(p) = P'(p) = 0. \quad (9.25)$$

Этот случай подробно исследован в п. 9.1: уравнения движения сведены к эллиптическим квадратурам, классифицированы возможные типы движений гиростата, выделены значения  $h, k, g, \lambda$ , отвечающие вырожденным классам движений.

Из соотношений (9.4), (9.22), (9.24) следует, что величина

$$u = p^2 + \lambda r + \nu_1$$

является кратным корнем полинома

$$Q(u) = (u^2 - 2\lambda^2 h - k)^2 - 8\lambda^2 u + 4\lambda^2(g^2 - 2h - \lambda^2),$$

то есть  $u$  удовлетворяет уравнениям

$$Q(u) = Q'(u) = 0. \quad (9.26)$$

Х.М. Яхья в работе [225] заметил, что интегралам (9.4) удовлетворяет частное решение, указанное П.В. Харламовым [208]. Далее будет показано, что для этого частного решения [208] постоянные  $h, k, g, \lambda$  связаны соотношениями (9.26).

Итак, рассмотрены критические точки, удовлетворяющие частному условию (9.22), т.е. принадлежащие одному сечению фазового пространства. Однако, некоторые критические поверхности  $J_{h,k,g}$  не имеют критических точек, удовлетворяющих (9.22). Поэтому рассмотрим случай, когда

$$q \neq 0. \quad (9.27)$$

Введем комплексные переменные

$$x_{1,2} = p \pm iq, \quad y_{1,2} = (p \pm iq)^2 + \nu_1 \pm i\nu_2, \quad z_{1,2} = (r - \lambda)(p \pm iq) + \nu_3 \quad (9.28)$$

и снова обозначим

$$R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + (2h - \lambda^2)x_1 x_2 + g(x_1 + x_2) + 1 - k,$$

$$P(x) = R(x, x).$$

Невырожденное координатное преобразование (9.28) позволяет неявно за-

писать интегралы (9.4) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= z_1 z_2 - R(x_1, x_2) = 0, \\
 f_2 &= z_1^2 - 2\lambda(x_2 - x_1)z_1 - y_1(x_2 - x_1)^2 - P(x_1) = 0, \\
 f_3 &= z_2^2 + 2\lambda(x_2 - x_1)z_2 - y_2(x_2 - x_1)^2 - P(x_2) = 0, \\
 f_4 &= (y_1 y_2 - k)(x_2 - x_1) + 2\lambda(x_2^2 z_1 - x_1^2 z_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

Составим матрицу Якоби функций  $f_i$  по переменным  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ . Если ранг этой матрицы меньше четырех (см. условие (9.21)), то имеем

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y_1 z_2 + \lambda(x_1 - x_2)(x_1^2 - y_1) = \sigma z_1, \\
 y_2 z_1 + \lambda(x_2 - x_1)(x_2^2 - y_2) = \sigma z_2, \\
 (k + 3y_1 y_2 - 4\lambda x_1 z_2)(x_1 - x_2) + \\
 \quad + 2\lambda(z_2 y_1 - z_1 y_2) + y_2 P'(x_1) = 2\sigma \frac{\partial R}{\partial x_1}, \\
 (k + 3y_1 y_2 - 4\lambda x_2 z_1)(x_2 - x_1) + \\
 \quad + 2\lambda(z_1 y_2 - z_2 y_1) + y_1 P'(x_2) = 2\sigma \frac{\partial R}{\partial x_2},
 \end{array} \right. \tag{9.30}$$

где  $\sigma$  – неопределенный множитель. Запишем (9.30) в действительной форме, предварительно исключив интегральные постоянные с помощью уравнений (9.29):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\sigma - \eta_1)a_1 - \eta_2 a_2 - 2\lambda q a_4 = 0, \\
 \eta_2 a_1 - (\sigma + \eta_1 + 2\lambda^2)a_2 - 2\lambda q a_3 = 0, \\
 2\lambda q a_2 + (\sigma - \eta_1)a_3 - \eta_2 a_4 = 0, \\
 -2\lambda q a_1 - \eta_2 a_3 + (\sigma + \eta_1 + 2\lambda^2)a_4 = 0,
 \end{array} \right. \tag{9.31}$$

где для краткости использованы обозначения

$$a_1 = \nu_3 + (r - \lambda)p, \quad a_2 = (r - \lambda)q, \quad a_3 = \nu_1 - \lambda(r - \lambda), \quad a_4 = \nu_2,$$

$$\eta_1 = \nu_1 + p^2 - q^2, \quad \eta_2 = \nu_2 + 2pq.$$

Величины  $a_i$  одновременно в нуль не обращаются при  $q \neq 0$ , поэтому из (9.31) находим

$$(\sigma + \lambda^2)^2 = (\eta_1 + \lambda^2)^2 + \eta_2^2 + 4\lambda^2 q^2. \tag{9.32}$$

Таким образом, действительный множитель  $\sigma$  в соотношениях (9.30) определен – он удовлетворяет уравнению (9.32). В частности, при  $\lambda = 0$  имеем  $\sigma^2 = k$ . Из (9.31) получим соотношения

$$\begin{aligned}\sigma + \lambda^2 &= \lambda q(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)/d, \\ \eta_1 + \lambda^2 &= \lambda q(a_1^2 + a_3^2 - a_2^2 - a_4^2)/d, \\ \eta_2 &= 2\lambda q(a_1 a_2 + a_3 a_4)/d,\end{aligned}\tag{9.33}$$

где  $d = a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$ .

Вместе с интегралами (9.4), два последних соотношения (9.33) определяют множество критических точек на поверхностях  $J_{h,k,g}(\lambda)$ . Введем новую переменную  $u = \sigma + \lambda r$ , которая зависит только от постоянных  $h, k, g, \lambda$ . Действительно, из (9.4), (9.27), (9.33) следует, что  $u$  является кратным корнем полинома  $Q(u)$ . Обозначим постоянные

$$c_0 = ug, \quad c_1 = 1 + (2u + 2h + \lambda^2)u, \quad c_2 = \frac{c_1}{4}(2u + 2h + \lambda^2),$$

тогда непосредственно из (9.4), (9.33) находим

$$\begin{aligned}(p - c_0)^2 + \frac{c_1}{4}(r - \lambda)^2 &= c_2, \\ p^2 + \frac{(c_1 - 1)}{c_1}q^2 + \frac{1}{4}(r + \lambda)^2 &= \frac{c_2}{c_1}, \\ \nu_1 &= \frac{4c_0(p - c_0) + 2\lambda(r - \lambda)}{1 - c_1} - \frac{4(p - c_0)^2}{c_1}, \\ \nu_2 &= \frac{2}{c_1}q(c_0 - p), \quad \nu_3 = \frac{2\lambda p - (r + \lambda)c_0}{1 - c_1}.\end{aligned}\tag{9.34}$$

Соотношениям (9.34) удовлетворяют критические точки  $\mathbb{R}^6$ , в которых интегралы (9.4) зависимы. С другой стороны, инвариантные соотношения (9.34) определяют решение П.В. Харламова [208]. В бифуркационное множество  $\Sigma_\lambda$  входит лишь та часть поверхности (9.26), которая отвечает действительным решениям системы (9.34).

Напомним, что условия (9.21), (9.25) приводят к следующим соотно-

шениям:

$$\begin{aligned} q = 0, \quad \nu_1 &= p_0^2 + \frac{1}{2}r^2 - h, \\ \nu_2^2 &= 1 - (r - \lambda)^2 p_0^2 - (p_0^2 + \frac{1}{2}r^2 - h)^2, \\ \nu_3 &= -(r - \lambda)p_0, \quad p_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$\Pi_1 = \{(h, k, g) : Q(u) = Q'(u) = 0, u > 0\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3(h, k, g),$$

$$\Pi_2 = \{(h, k, g) : Q(u) = Q'(u) = 0, u < 0\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3(h, k, g),$$

$$\Pi_3 = \{(h, k, g) : P(p) = P'(p) = 0, p \in \mathbb{R}\} \subset \Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3(h, k, g).$$

Зафиксируем константы  $h, g, \lambda$ , тогда прямая, параллельная оси  $Ok$ , пересекает  $\Pi_1$  в одной точке ( $k = k_1$ ),  $\Pi_2$  – в двух точках ( $k = k_2^{(1)}, k = k_2^{(1)}$ ), либо вовсе не имеет пересечений;  $\Pi_3$  – в одной точке ( $k = k_3^{(1)}$ ), либо в трех точках ( $k = k_3^{(1)}, k = k_3^{(2)}, k = k_3^{(3)}$ ). Соответствующие указанным значениям  $k_i^{(j)}$  компоненты поверхностей  $\Pi_j$  будем обозначать  $\Pi_j^{(j)}$ . Возможны случаи, когда некоторая область  $\Delta$  поверхности кратных корней (9.28) не принадлежит бифуркационному множеству, тогда будем использовать обозначение  $\Delta = \overline{\Pi_j^{(j)}} \not\subset \Sigma_\lambda$ . В качестве примера укажем результат М.П. Харламова [197], который в случае  $\lambda = 0$  доказал, что часть поверхности кратных корней, соответствующая третьему классу в терминологии Аппельрота [6], не принадлежит бифуркационному множеству. Вырождение гиперэллиптических квадратур в эллиптические не гарантирует изменения топологии интегрального многообразия  $J_{h,k,g}$ .

Результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 9.2.1.** *Бифуркационное множество  $\Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$  является подмножеством объединения поверхностей  $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$ , задаваемых уравнениями (9.25), (9.26). Действительные решения уравнений (9.34), (9.35) образуют множество критических точек на  $J_{h,k,g}(\lambda)$ .*

При любом фиксированном значении  $\lambda$  множество  $\Sigma_\lambda$  делит  $\mathbb{R}^3(h, k, g)$  на области, внутри которых топологический тип  $J_{h,k,g}$  не меняется. В точках бифуркационного множества критические поверхности  $J_{h,k,g}$  имеют различное строение. Например, отдельные связные компоненты  $J_{h,k,g}$  могут быть обычными торами Лиувилля, окружностями (9.34), (9.35) либо двумерными самопересекающимися поверхностями, содержащими критические окружности (9.34), (9.35). Уравнения (9.25), (9.26) позволяют изучить геометрические свойства множества  $\Sigma_\lambda$  и найти на нем разделяющие кривые, посредством которых осуществляется топологическая классификация критических интегральных поверхностей  $J_{h,k,g}$ .

Множество  $\Sigma_\lambda$  в  $\mathbb{R}^3(h, k, g)$  состоит из трех компонент: поверхности (9.25) и двух непересекающихся компонент поверхности (9.26), отвечающих неравенствам  $u < 0$ ,  $u > 0$ . Найдем множество точек  $(h, k, g) \in \mathbb{R}^3(h, k, g)$ , одновременно удовлетворяющих условиям (9.25), (9.26). Из таких точек состоят кривые, в которых происходит касание либо пересечение различных связных компонент множества  $\Sigma_\lambda$ . Пересечения  $\Pi_1 \cap \Pi_3$ ,  $\Pi_2 \cap \Pi_3$  происходят на кривых  $\Lambda_{1,2,3} \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$ , заданных уравнениями

$$\Lambda_{1,2,3} = \left\{ \begin{aligned} h &= (2r - \lambda)\mu - \frac{r}{2}(r - \lambda), \\ k &= \lambda\left(\mu - \frac{r}{2}\right)\left(\lambda\mu + \frac{3}{2}\lambda r - 2r^2\right), \\ g^2 &= 4r\left(\mu - \frac{r}{2}\right)(r - \lambda)^2\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)^2, \quad r \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \end{aligned} \right\}, \quad (9.36)$$

где через  $\Gamma_i$  обозначены интервалы  $(0, \lambda)$ ,  $(-\infty, 0)$ ,  $(\lambda, \infty)$ , кроме того,

$$\mu^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{1}{(r - \lambda)^2}, \quad \text{sign}(\mu) = \text{sign}(r).$$

Координаты поверхности  $\Pi_3$  подчиним дополнительному условию  $P''(p) = 0$  и определим  $h, k, g$  как функции параметра  $p$ . Полученные параметрические уравнения

$$\Lambda_4 = \left\{ h = 3p^2 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad k = 1 - 3p^4, \quad g = -4p^3, \quad p \leq 0 \right\} \quad (9.37)$$

определяют особую кривую – ребро возврата поверхности  $\Pi_3$ . На кривой (9.37) один из вещественных корней полинома  $P(p)$  является трехкратным. Одна из компонент поверхности (9.26) также имеет кривую, координаты которой удовлетворяют уравнениям  $Q(u) = Q'(u) = Q''(u) = 0$ . Из этих соотношений следуют уравнения ребра возврата:

$$\Lambda_5 = \left\{ 2h - g^2 + \lambda^2 - 3\lambda^{\frac{2}{3}} = 0, \quad k + 2h\lambda^2 - 3\lambda^{\frac{4}{3}} = 0 \right\}. \quad (9.38)$$

Равенства (9.25), (9.26) также имеем для точек кривой

$$\Lambda_6 = \left\{ h = -\frac{1}{2u} - u - \frac{\lambda^2}{2}, \quad k = (u + \lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2}{u}, \right. \\ \left. g^2 = -\frac{(u + \lambda^2)}{u^2}, \quad u \leq -\lambda^2 \right\}. \quad (9.39)$$

Еще одна особая кривая поверхности (9.25) соответствует паре кратных корней полинома  $P(p)$ :

$$\Lambda_7 = \left\{ \left( h - \frac{\lambda^2}{2} \right)^2 + 1 = k, \quad g = 0 \right\}. \quad (9.40)$$

Итак, кривые (9.36)–(9.40) разбивают  $\Sigma_\lambda$  на подобласти с различными типами критических поверхностей  $J_{h,k,g}$ . В точках, принадлежащих кривым (9.36)–(9.40), зависимость основных переменных от времени имеет наиболее простой вид.

Заметим, что уравнения разделяющих кривых (9.36)–(9.37), (9.40) также следуют из результатов п. 9.1.3, где были классифицированы все вырожденные движения гиростата при условиях (9.25). В частности, кривые  $\Lambda_{1,2,3}$  следуют из условия  $D = 0$ , где дискриминант  $D$  имеет вид (9.14). Кривая  $\Lambda_4$  следует из условия  $L_2 = 0$ ;  $\Lambda_6$  соответствует условию  $L_3 = 0$ ; кривая  $\Lambda_7$  соответствует равенству  $L_1 = 0$ .

### 9.3 Интегральные многообразия и топологические инварианты гиростата Ковалевской

Исследована структура совместных уровней первых интегралов в интегрируемом случае движения гиростата, обобщившем классический случай С.В. Ковалевской. Качественное описание эволюции и перестроек торов Лиувилля на трехмерных изоэнергетических поверхностях получено с помощью топологических инвариантов А.Т. Фоменко.

#### 9.3.1 Области возможности движений

Интегралы (9.4) позволяют свести уравнения (9.3) к квадратурам, однако простые квадратурные формулы для этих уравнений до сих пор не найдены. Каждому значению параметра  $\lambda$  соответствует динамическая система, еще более сложная, чем в классическом случае Ковалевской. Рассматриваемая задача отличается от известных интегрируемых случаев не только аналитической сложностью, но и разнообразием возможных типов движений гиростата. Все эти движения описываются единым однопараметрическим семейством динамических систем (9.3). Изучение топологии динамической системы (9.3) дает общее (хоть и достаточно грубое) представление о ее поведении. Целью настоящей работы является качественный анализ движений гиростата с помощью топологических методов [21, 200], позволяющих исследовать перестройки и взаимодействие траекторий – решений системы (9.3), (9.4).

Зафиксируем постоянные  $h, k, g, \lambda$ . Совместная поверхность уровня функций  $H, G, I$ , заданных на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^6$ , инвариантна относительно фазового потока системы (9.3). Будем называть

$$Q_{h,g}^3(\lambda) = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6$$

изоэнергетической поверхностью. Топология  $Q_{h,g}^3$  однозначно определя-

ется проекцией  $B_{h,g} = \pi(Q_{h,g}^3)$  изоэнергетической поверхности на сферу  $S^2 = \{I = 1\}$ . Действительно, многообразие  $Q_{h,g}^3$  диффеоморфно расслоенному пространству с базой  $B_{h,g}$  и слоем  $S^1$ , у которого слои над  $\partial B_{h,g}$  отождествлены в точки. Находим из (9.4), что область  $B_{h,g}$  состоит из тех (и только тех) точек  $S^2 = \{I = 1\}$ , для которых выполняется неравенство

$$(g - \lambda\nu_3)^2 \leq 2(h + \nu_1)(2 - \nu_3^2).$$

Топология  $B_{h,g}$  и, следовательно,  $Q_{h,g}^3$  меняется при прохождении множества  $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ , состоящего из критических значений отображения  $\tilde{F} = H \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g)$ . Точкам  $(h, g) \in \mathbb{R}^2(h, g) \setminus \tilde{\Sigma}$  отвечают связанные трехмерные изоэнергетические поверхности  $Q_{h,g}^3$ , каждая из которых гомеоморфна одному из следующих многообразий:  $\mathbb{R}P^3$ ,  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $N_2^3$ , где  $N_2^3$  является связной суммой двух экземпляров  $S^1 \times S^2$ .

Интегрируемость уравнений (9.3) позволяет изучить структуру изоэнергетических поверхностей более детально. Дополнительный интеграл  $K$  расслаивает  $Q_{h,g}^3$  на двумерные поверхности уровня

$$J_{h,k,g}(\lambda) = \{H = h, K = k, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6.$$

По теореме Лиувилля [11] неособая компактная поверхность  $J_{h,k,g}$  является объединением двумерных торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Основную роль в классификации критических и регулярных поверхностей  $J_{h,k,g}$  играет бифуркационное множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$ , состоящее из критических значений отображения

$$F = H \times K \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3(h, k, g).$$

М.П. Харламов [200] построил множество  $\Sigma$  и изучил топологию поверхностей  $J_{h,k,g}$  в известных интегрируемых случаях динамики твердого тела и, в частности, в случае Ковалевской. Бифуркационное множество  $\Sigma$  интегрируемого случая (9.3), (9.4) указано в работах [55, 56] и полностью изучено

в работе [171] (исследованы особые точки и перестройки бифуркационного множества, дана полная классификация бифуркационных диаграмм на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, k)$ ).

### 9.3.2 Симметрии

В случае Ковалевской структуру поверхностей  $J_{h,k,g}$  удобно изучать по их проекциям на плоскость  $\mathbb{R}^2(p, q)$  [6, 200]. Во-первых, “квадратурные” переменные  $s_1, s_2$  тогда получают простую геометрическую интерпретацию; во-вторых, образы поверхностей  $J_{h,k,g}$  симметричны не только относительно преобразования  $(p, q) \rightarrow (p, -q)$ , но также переходят сами в себя при инверсии плоскости  $\mathbb{R}^2(p, q)$  относительно окружности

$$S^1 = \{(p - a)^2 + q^2 = b\}, \quad (9.41)$$

где постоянные  $a, b$  зависят от  $h, k, g$ . Как следует из дальнейшего, такая симметрия образов многообразий  $J_{h,k,g}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2(p, q)$  сохраняется и для гиростата.

Выберем постоянные  $h, k, g, \lambda$  так, чтобы полином

$$P(x) = -x^4 + (2h - \lambda^2)x^2 + 2gx + 1 - k$$

не имел кратных корней. Действительные параметры  $a, b$  зададим следующим образом: пусть  $a$  – корень кубического полинома

$$f(x) = P'^2(x) + 16x^2P(x)$$

и  $4ab = -P'(a)$ . Введем комплексные переменные  $x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}$  по формулам

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= p \pm iq, & y_{1,2} &= ((r - \lambda)x_{1,2} + \nu_3)\mu_{1,2}, \\ z_{1,2} &= (x_{1,2}^2 + \nu_1 \pm i\nu_2)(x_2 - x_1)^2\mu_{1,2}^2 \pm 2\lambda y_{1,2}(x_2 - x_1)\mu_{1,2}, \end{aligned} \quad (9.42)$$

где  $\mu_{1,2} = \sqrt{b}((x_{1,2} - a)^2 - b)^{-1}$ . Тогда интегралы (9.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1 y_2 - R(x_1, x_2) \mu_1 \mu_2 = 0, \\ f_2 &= A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + B_1 y_1 + B_2 y_2 + C_0 = k, \\ f_3 &= y_1^2 - z_1 - P(x_1) \mu_1^2 = 0, \\ f_4 &= y_2^2 - z_2 - P(x_2) \mu_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (9.43)$$

где

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2) &= -x_1^2 x_2^2 + (2h - \lambda^2) x_1 x_2 + g(x_1 + x_2) + 1 - k, \\ P(x) &= R(x, x), \quad A_1 = \bar{A}_2 = -P(x_2) \mu_1^{-2} (x_2 - x_1)^{-4}, \\ B_1 &= \bar{B}_2 = 2\lambda [R(x_1, x_2) + P(x_2) + x_2^2 (x_2 - x_1)^2] \mu_1^{-1} (x_2 - x_1)^{-3}, \\ C_0 &= \frac{R^2(x_1, x_2)}{(x_2 - x_1)^4} + \frac{P(x_1) P(x_2)}{(x_2 - x_1)^4} - 4\lambda^2 \frac{R(x_1, x_2)}{(x_2 - x_1)^2}. \end{aligned}$$

Осуществим преобразование переменных  $(x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}) \rightarrow (x'_{1,2}, y'_{1,2}, z'_{1,2})$ :

$$x'_{1,2} = a + \frac{b}{x_{1,2} - a}, \quad y'_{1,2} = y_{1,2}, \quad z'_{1,2} = z_{1,2}. \quad (9.44)$$

Непосредственной подстановкой находим равенства

$$R(x'_1, x'_2) = \frac{b^2 R(x_1, x_2)}{(x_1 - a)^2 (x_2 - a)^2}, \quad P(x'_1) = \frac{b^2 P(x_1)}{(x_1 - a)^4}, \quad P(x'_2) = \frac{b^2 P(x_2)}{(x_2 - a)^4}.$$

Далее получаем, что в новых переменных вид функций (9.43) не меняется.

Инвариантность  $f_i$  связана с симметриями уравнений (9.3), поэтому вернемся к исходным переменным  $p, q, \dots, \nu_3$  и запишем преобразование (9.44) для них:

$$\begin{aligned} p' &= a + (p - a) b m^{-1}, \quad q' = -q b m^{-1}, \\ r' &= 2\lambda - r - 2(p - a) m_1, \quad \nu'_1 = -\nu_1 - m m_1^2 - 2(p - a) m_2, \\ \nu'_2 &= \nu_2 + 2q m_2, \quad \nu'_3 = a(r - \lambda) + m_1(b + 2a(p - a)), \end{aligned} \quad (9.45)$$

где

$$\begin{aligned} m &= (p - a)^2 + q^2, \quad m_1 = (\nu_3 + a(r - \lambda)) m^{-1}, \\ m_2 &= a + a m^{-1} (b + 2a(p - a)) + \lambda m_1 - (p - a) m_1^2. \end{aligned}$$

Для невырожденности замены (9.44) следует исключить из рассмотрения точки  $\mathbb{R}^6$ , в которых  $t = 0$ . Можно показать, что при условии  $P(a) < 0$  эти точки не принадлежат интегральным многообразиям  $J_{h,k,g}(\lambda)$ . Следующее утверждение проверяется подстановкой (9.45) в уравнения (9.3), (9.4).

**Предложение 9.3.1.** *Если постоянные  $a, b$  действительные и удовлетворяют соотношениям  $f(a) = 0$ ,  $4ab = -P'(a)$ , то система уравнений (9.3) и ее первые интегралы (9.4) инвариантны относительно координатного преобразования (9.45).*

Преобразование (9.45) переводит решения системы (9.3) в решения той же системы, а точку многообразия  $J_{h,k,g}$  с координатами  $(p, q, \dots, \nu_3)$  отображает в точку  $(p', q', \dots, \nu'_3)$ , также принадлежащую  $J_{h,k,g}$ . В случае  $g = 0$  одна из окружностей (9.41) вырождается в прямую  $\{(p, q) : p = 0\}$ . Тогда уравнения (9.3), (9.4) инвариантны относительно преобразования

$$(p, q, r, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \rightarrow (-p, -q, r, \nu_1, \nu_2, -\nu_3).$$

### 9.3.3 Проекция инвариантных торов

Рассмотрим проекцию  $pr : (p, q, \dots, \nu_3) \rightarrow (p, q)$  и изучим структуру областей  $U_{h,k,g} = pr(J_{h,k,g}) \subset \mathbb{R}^2(p, q)$ . В случае Ковалевской ( $\lambda = 0$ ) четыре точки многообразия  $J_{h,k,g}$  проектируются в каждую внутреннюю точку области  $U_{h,k,g}$  [200]. Для гиростата число прообразов произвольной внутренней точки области  $U_{h,k,g}$  равняется двум либо четырем. Не все качественные перестройки  $U_{h,k,g}$  связаны с перестройками  $J_{h,k,g}$  на множестве  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$ , поэтому здесь существуют различные типы областей  $U_{h,k,g}$  для диффеоморфных между собой интегральных многообразий  $J_{h,k,g}$ . Область  $U_{h,k,g}$  отображается в себя при инверсии плоскости  $\mathbb{R}^2(p, q)$  относительно окружности (9.41) и при зеркальном отражении  $(p, q) \rightarrow (p, -q)$ . Это свойство позволяет находить эквивалентные  $U_{h,k,g}$ , устанавливая соответствия между областями  $U_{h,k,g}$  и многообразиями  $J_{h,k,g}$ . Из соотношений

(9.43) следует, что движение рассматриваемого гиростата возможно лишь при тех значениях  $h, k, g, \lambda$ , при которых полином  $P(a)$  имеет действительные корни. Двум действительным корням  $P(a)$  отвечает одна окружность (9.41) на плоскости  $\mathbb{R}^2(p, q)$ . Если все корни  $P(a)$  действительны, то две окружности вида (9.41) имеются на плоскости  $\mathbb{R}^2(p, q)$  и область  $U_{h,k,g}$  симметрична относительно каждой из них (см. рис. 9.1).

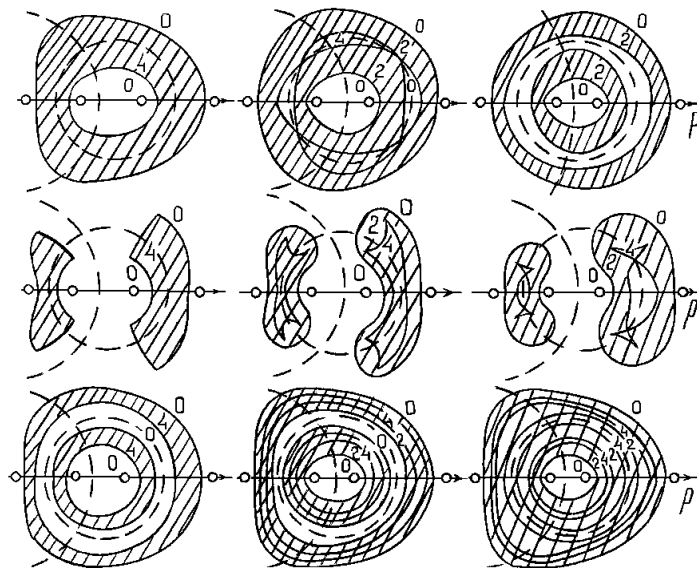


Рис. 9.1: Перестройки областей  $U_{h,k,g}(\lambda)$ .

При фиксированном значении  $\lambda$  бифуркационное множество  $\Sigma$  делит  $\mathbb{R}^3(h, k, g)$  на открытые связные области  $\Omega_i$ , внутри которых сохраняется число торов в  $J_{h,k,g}$ . Множества  $\Sigma(\lambda)$ ,  $\Omega_i(\lambda)$ ,  $J_{h,k,g}(\lambda)$  зависят от параметра  $\lambda$  и деформируются при его непрерывном изменении. Для топологической классификации требуется в каждой области  $\Omega_i(\lambda)$  множества  $\mathbb{R}^4(h, k, g, \lambda) \setminus \Sigma(\lambda)$  указать количество связных компонент  $J_{h,k,g}(\lambda)$ . Без ограничения общности примем  $\lambda \geq 0, g \geq 0$ . В случае Ковалевской имеется пять областей  $\Omega_1 - \Omega_5$ , в которых интегральные многообразия  $J_{h,k,g}$  не пусты [200]. Такое разбиение  $\mathbb{R}^3(h, k, g) \setminus \Sigma(\lambda)$  сохраняется для всех значений  $\lambda \in (0, 2^{-3/4})$ , т.е. непрерывная деформация областей  $\Omega_i(\lambda)$  не меняет структуру многообразий  $J_{h,k,g}(\lambda)$ . Для  $(h, k, g) \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$  перестройки

$U_{h,k,g}(\lambda)$ , происходящие при увеличении параметра  $\lambda$ , показаны на рис. 9.1 (ось  $q$  вертикальна, на оси  $p$  отмечены действительные корни полинома  $P(a)$ ). При  $\lambda > 2^{-3/4}$  область  $\Omega_5(\lambda)$  вырождается, но появляется область  $\Omega_6(\lambda)$ , в которой многообразии  $J_{h,k,g}(\lambda)$  также состоит из четырех торов Лиувилля. Существование нового типа  $J_{h,k,g}(\lambda)$ , которого не было в случае Ковалевской, впервые отмечено автором в работе [55].

Согласно [56] критические точки отображения

$$F = H \times K \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3(h, k, g)$$

организованы в критические окружности. Эти “топологические” окружности описываются алгебраическими уравнениями и отвечают двум семействам частных решений системы (9.3), (9.4), указанных П.В. Харламовым [203, 208]. В точках бифуркационного множества, принадлежащих кривой  $\{P(a) = P'(a) = 0\} \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$ , замены (9.44), (9.45) вырождены. В этом случае при классификации поверхностей  $J_{h,k,g}$  удобно использовать вспомогательные переменные и квадратуры, полученные в работе [67].

### 9.3.4 Топологические инварианты

Одной из основных качественных характеристик интегрируемой гамильтоновой системы является структура ее лиувиллева слоения [21] (т.е. структура разбиения фазового пространства системы на торы Лиувилля и критические интегральные поверхности). В 1985 г. А.Т. Фоменко предложил новый подход в изучении этой структуры, позволяющий строить топологические инварианты и классифицировать слоения на трехмерных изоэнергетических поверхностях. Интегрируемые случаи динамики твердого тела описаны и классифицированы в работах А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова и А.А. Ошемкова. С помощью молекул, изображающих структуру слоения на  $Q_{h,g}^3$ , ими детально исследован случай Ковалевской. Компьютерный анализ этого случая выполнен в работе [244].

Составим полный список молекул для неособых изоэнергетических поверхностей, встречающихся в интегрируемом случае движения гиростата. Для этого запишем уравнения кривых, разделяющих плоскость  $\mathbb{R}^2(h, g)$  на области с различными типами поверхностей  $Q_{h,g}^3$  и различными типами слоений на  $Q_{h,g}^3$ . Используем уравнения разделяющих кривых  $\Lambda_i$ , полученные в п. 9.2. Проекции пространственных кривых  $\Lambda_i$  на плоскость  $\mathbb{R}^2(h, g)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \ell_{1,2,3} &= \left\{ h = (2r - \lambda)\mu - \frac{r}{2}(r - \lambda), \right. \\ &\quad \left. g^2 = 4r\left(\mu - \frac{r}{2}\right)(r - \lambda)^2\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2(h, g), \end{aligned} \quad (9.46)$$

где

$$\mu = \text{sign}(r) \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{1}{(r - \lambda)^2}}, \quad r \in (-\infty, 0) \cup (0, \lambda) \cup (\lambda, \infty),$$

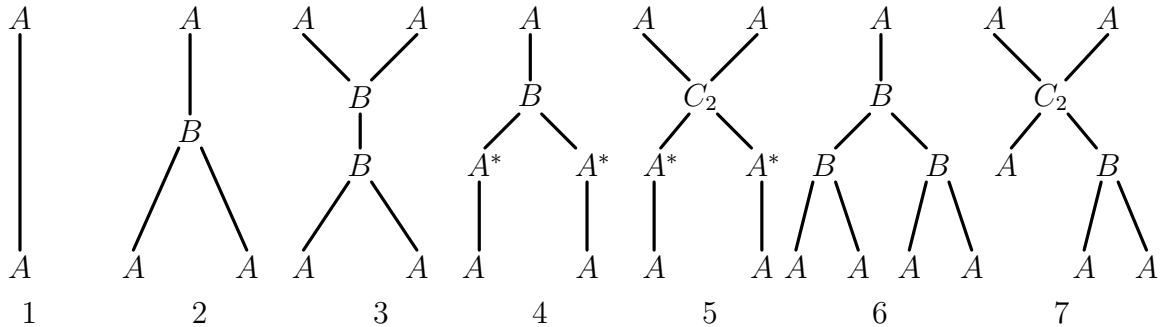
$$\ell_4 = \left\{ h = -\frac{1}{2u} - u - \frac{\lambda^2}{2}, \quad g^2 = -\frac{(u + \lambda^2)}{u^2}, \quad u \leq -\lambda^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2(h, g), \quad (9.47)$$

$$\ell_5 = \left\{ \frac{16}{27}\left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^3 - g^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2(h, g), \quad (9.48)$$

$$\ell_6 = \left\{ 2h - g^2 + \lambda^2 - 3\lambda^{\frac{2}{3}} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2(h, g). \quad (9.49)$$

В каждой точке  $(h, g)$ , не принадлежащей кривым (9.46)-(9.49), построим граф, вершины которого соответствуют особым слоям ливиллева слоения на  $Q_{h,g}^3$ , а ребра изображают однопараметрические семейства торов. Число критических окружностей на каждом критическом уровне интеграла  $K = k$  определим с помощью соотношений П.В. Харламова [56, 208]. Анализ областей  $U_{h,k,g} \subset \mathbb{R}^2(p, q)$  позволяет выяснить, сколько торов находится выше и ниже любого критического уровня. Обозначим перестройки торов, происходящие в окрестностях критических слоев на  $Q_{h,g}^3$ , буквами-атомами  $A, A^*, B, C_2$  [21]. Тогда молекулы  $W_i$  неособых изоэнергетических поверхностей интегрируемой системы (9.3), (9.4) представлены на рис. 9.2. Только молекула  $W_7$  из этого списка не встречалась ранее в случае Ковалевской [21]. При нулевой постоянной площадей отсутствует молекула

Рис. 9.2: Молекулы  $W_i$  неособых изоэнергетических поверхностей



$W_4$  на рис. 9.2 (численный анализ случая  $g = 0$  выполнен в [171]). Пары  $(\mathbb{R}P^3, W_7)$ ,  $(\mathbb{R}P^3, W_3)$  и  $(S^1 \times S^2, W_3)$  существуют лишь при  $\lambda \neq 0$ .

Таблица 9.1: Слоения многообразий  $(Q_{h,g}^3, W_i)$

$Q_{h,g}^3$	Молекулы $W_i$
$\mathbb{R}P^3$	$W_3$ $W_4$ $W_5$ $W_6$ $W_7$
$S^3$	$W_1$ $W_2$ $W_3$ $W_6$
$S^1 \times S^2$	$W_2$ $W_3$ $W_6$
$\#_2(S^1 \times S^2)$	$W_6$

Таблица 9.2: Инвариантные многообразия  $J_{h,k,g}$

$\Omega_i \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$J_{h,k,g}$	$T^2$	$2T^2$	$2T^2$	$2T^2$	$4T^2$	$4T^2$

Результат сформулируем в виде следующей теоремы:

**Теорема 9.3.2.** *Интегрируемая система (9.3), (9.4) обладает следующими свойствами:*

- а) неособые изоэнергетические поверхности  $Q_{h,g}^3$  диффеоморфны 3-многообразиям  $\mathbb{R}P^3$ ,  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $N_2^3 = (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$ ;
- б) регулярные компоненты интегральных многообразий  $J_{h,k,g}(\lambda)$  диффеоморфны  $T^2$ ,  $2T^2$ ,  $4T^2$ ;
- в) перестройки  $J_{h,k,g}$ , происходящие в окрестностях критических слов на  $Q_{h,g}^3$ , описываются (в обозначениях [21]) атомами  $A, A^*, B, C_2$ ;
- г) возможные слоения Лиувилля неособых изоэнергетических поверх-

ностей  $Q_{h,g}^3$  представлены молекулами  $W_1 - W_7$ , табл. 9.1 содержит полный список пар  $(Q_{h,g}^3, W_i)$ .

Бифуркационные кривые разделяют пространство параметров гиростата  $\mathbb{R}^2(h, g, \lambda)$  на 30 областей, в каждой такой области интегральное многообразие  $Q_{h,g}^3$  специальным образом разделено на блоки критическими слоями. Исключим из рассмотрения случай, когда  $Q_{h,g}^3$  пусто. Все остальные варианты представлены в табл. 9.3. В частности, в таблице приведены примеры числовых значений параметров  $\lambda, h_1 = h - \lambda^2/2, g$ , указан соответствующий этим значениям род многообразия  $Q_{h,g}^3$ , тип молекулы  $W_i$ , порядок следования критических слоев при возрастании константы  $k \in (-\infty, \infty)$ . В результате отождествления топологически эквивалентных молекул  $W_i$  приходим к утверждению  $\mathcal{Z}$ ), сформулированному в теореме 9.3.2.

## 9.4 Выводы

В этом разделе аналитическими, качественными и топологическими методами изучена вполне интегрируемая система, описывающая движение гиростата Ковалевской. В п. 9.1 при одном дополнительном ограничении на параметры механической системы дифференциальные уравнения (9.1) сведены к эллиптическим квадратурам, классифицированы возможные движения гиростата, в частности, найдены семейства двухчастотных квазипериодических и асимптотических движений. В п. 9.2 найдено и полностью исследовано бифуркационное множество общей задачи. В п. 9.3 исследованы двумерные и трехмерные интегральные многообразия системы (9.1). В п. 9.3.2 указаны нетривиальные симметрии, позволяющие различать неэквивалентные типы многообразий  $J_{h,k,g}(\lambda)$ . В терминах топологических инвариантов Фоменко [21] описаны эволюции и возможные перестройки торов Лиувилля на трехмерных изоэнергетических поверхностях.

Таблица 9.3: Примеры вычисления молекул  $W_i$ 

№	$\lambda$	$h_1$	$g$	$l$	$W_i$	$\Omega_i \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma, \Pi_i^{(j)} \subset \Sigma$ для всех $k \in (-\infty, \infty)$										
						$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$								
1	0.15	0.0	1.0	1	$W_1$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$								
2	0.15	1.0	1.0	1	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$				
3	0.15	0.8	0.2	1	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
4	0.15	2.0	0.5	0	$W_5$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
5	0.15	2.0	1.0	0	$W_4$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\overline{\Pi}_2^{(2)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
6	0.15	2.7	2.5	2	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$						
7	0.15	2.7	2.2	1	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$				
8	0.15	1.63	1.565	1	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
9	0.15	1.62	1.54	0	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
10	0.15	1.595	1.535	2	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
11	0.15	1.572	1.51	1	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
12	0.15	1.592	1.54	1	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
13	0.15	0.3	0.1	1	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$				
14	0.4	3.0	1.2	0	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\overline{\Pi}_2^{(2)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
15	0.4	3.5	0.3	0	$W_7$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
16	0.4	3.0	2.1	1	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
17	1.31	0.115	0.04	2	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$						
18	1.31	0.4	0.4	1	$W_2$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$				
19	1.31	0.15	0.01	2	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(3)}$		
20	1.31	0.14	0.01	3	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(3)}$		
21	1.31	0.2	0.05	1	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
22	1.31	0.25	0.05	0	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
23	1.31	0.142	0.025	2	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
24	1.31	0.137	0.03	1	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
25	1.31	0.13	0.015	2	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_3^{(3)}$		
26	0.95	0.615	0.365	1	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(1)}$	$\Omega_4$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_6$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_4$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$
27	0.012	1.85	1.86	2	$W_3$	$\Pi_1$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$		
28	0.012	1.9	1.89	2	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_3$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$		
29	0.012	1.86	1.856	3	$W_6$	$\Pi_1$	$\Omega_3$	$\Pi_2^{(1)}$	$\Omega_5$	$\Pi_3^{(2)}$	$\Omega_2$	$\Pi_2^{(2)}$	$\Omega_1$	$\Pi_3^{(3)}$		