УДК 517.9

А. А. Ковалевский

О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка

Приведены результаты о суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для некоторого класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка в зависимости от свойств интегрируемости правых частей уравнений. Рассмотрены случаи, когда эти правые части принадлежат пространствам Лебега с показателями, близкими к единице, а также более широким множествам, содержащимся в L^1.

Библиография: 8 наименований.

Введение

Понятие энтропийного решения задачи Дирихле для рассматриваемого в настоящей статье класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка введено и изучено в [1], [2] на основе подхода, предложенного в [3] для уравнений второго порядка. В работе получен ряд результатов о суммируемости энтропийных решений данной задачи в зависимости от свойств интегрируемости правых частей соответствующих уравнений. Рассмотрены случаи, когда эти правые части принадлежат пространствам Лебега с показателями, близкими к единице, а также более широким множествам, содержащимся в L^1. Отметим, что для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правыми частями такого типа некоторые результаты о суммируемости слабых решений получены в [4], [5]. Недавно они были уточнены и дополнены в работе [6] на основе полученных в ней результатов о суммируемости энтропийных решений тех же уравнений.

Настоящая статья состоит из двух параграфов. В §1 рассмотрено множество функций $\mathring{H}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, введенное в [1], [2], и для элементов этого множества, подчиненных некоторым интегральным неравенствам, установлены различные свойства интегрируемости. При этом используются приемы, аналогичные изложенным в [6] для иной ситуации. В §2 приведена формулировка рассматриваемой задачи Дирихле и установлено, что энтропийные решения этой задачи удовлетворяют интегральным неравенствам из §1. Этот факт вместе с надлежащими условиями на правые части рассматриваемых уравнений и результатами, полученными в §1, позволяет доказать теоремы об интегрируемости энтропийных решений данной задачи. Приведены также некоторые результаты для слабых решений этой задачи.

Исходные предположения работы следующие: $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in (1, n/2)$, $q \in (2p, n)$.

© А. А. Ковалевский, 2003

Пусть Λ – множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$, а $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi\colon \Lambda \to \mathbb{R}$. Если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

§ 1. О суммируемости функций, подчиненных некоторым интегральным неравенствам

Приведем сначала несколько общих результатов, которые будут полезны в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть u – измеримая функция на Ω, $M > 0$, $\tau > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant M k^{-\tau}. \tag{1.1}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0,\tau)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in (0,\tau)$ и положим $\lambda_1 = 2/(\tau - \lambda)$. В силу (1.1) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{k^{\lambda_1} \leqslant |u| < (k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda\, dx \leqslant 2^{\tau+\lambda_1\lambda} M k^{-2}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Лемма доказана.

Отметим, что свойство, представленное леммой 1.1, использовалось ранее, например в [3], а также в [1], [2].

Лемма 1.2. *Пусть u – измеримая функция на Ω, $M > 0$, $\tau > 0$, $\tau_1 > 1$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, справедливо неравенство*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant M k^{-\tau} (\ln k)^{-\tau_1}. \tag{1.2}$$

Тогда $u \in L^\tau(\Omega)$.

Доказательство. В силу (1.2) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{e^k \leqslant |u| < e^{k+1}\}} |u|^\tau\, dx \leqslant 2^{\tau+\tau_1} e^\tau M k^{-\tau_1}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства и учитывая, что $\tau_1 > 1$, получаем, что $u \in L^\tau(\Omega)$. Лемма доказана.

Для любого $\lambda \in [1,n)$ положим $\lambda^* = n\lambda/(n-\lambda)$.

Известно (см., например, [7]), что если $\lambda \in [1,n)$, то $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $c_{n,\lambda}$, зависящая только от n и λ, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$

$$\biggl(\int_\Omega |u|^{\lambda^*}\, dx\biggr)^{1/\lambda^*} \leqslant c_{n,\lambda} \biggl(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^\lambda\, dx\biggr)^{1/\lambda}. \tag{1.3}$$

Перейдем к рассмотрению некоторого специального множества функций и свойств его элементов.

Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций из $W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ ψ_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\psi_k(s) = s - s^{k+2} + \frac{k+1}{k+3}\,s^{k+3}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $h_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, полагая

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если} \quad |s| \leqslant k,\\ \left[\psi_k\left(\dfrac{|s|-k}{k}\right)+1\right]k\,\mathrm{sign}\,s, & \text{если} \quad k < |s| < 2k,\\ 2k\dfrac{k+2}{k+3}\,\mathrm{sign}\,s, & \text{если} \quad |s| \geqslant 2k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$|h_k| \leqslant 2k \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$0 \leqslant h_k' \leqslant 1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$|h_k''| \leqslant 3 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Через $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующему условию: $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Положим для произвольных $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$

$$k(u,x) = \min\{N \in \mathbb{N}\colon |u(x)| < N\}.$$

Определение 1.1. Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$. Тогда $\delta^\alpha u$ – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta^\alpha u(x) = D^\alpha h_{k(u,x)}(u)(x).$$

Лемма 1.3. *Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_k(u) \quad \textit{п.в. на} \quad \{|u| \leqslant k\}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Для любых $k, k_1 \in \mathbb{N}$ таких, что $2k \leqslant k_1$, имеем $h_k(u) = h_k(h_{k_1}(u))$. Используя этот факт, устанавливаем, что для любых $k, k_1 \in \mathbb{N}$ таких, что $k < k_1$,

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_{k_1}(u) \text{ п.в. на } \{|u| \leqslant k\}. \tag{1.8}$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. В силу (1.8) существует множество E меры нуль такое, что для любых $N \in \mathbb{N},\ N < k+1$, и $x \in \{|u| \leqslant N\} \setminus E$

$$D^\alpha h_N(u)(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x).$$

Тогда для любого фиксированного $x \in \{|u| \leqslant k\} \setminus E$, учитывая определение функции $\delta^\alpha u$, получаем $\delta^\alpha u(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x)$. Ясно также, что $D^\alpha h_k(u)(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x)$. Следовательно, $\delta^\alpha u(x) = D^\alpha h_k(u)(x)$. Отсюда заключаем, что (1.7) справедливо. Лемма доказана.

Отметим, что в силу леммы 1.3 приведенное выше определение функций $\delta^\alpha u$ эквивалентно определению этих функций, данному в [1], [2].

Лемма 1.4. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega),\ \ k \in \mathbb{N}$. *Тогда*:
1) *если* α – n*-мерный мультииндекс*, $|\alpha| = 1$, *то*

$$D^\alpha h_k(u) = h_k'(u)\delta^\alpha u \quad \text{\textit{п.в. на}} \quad \Omega;$$

2) *если* α – n*-мерный мультииндекс*, $|\alpha| = 2$, *то*

$$|D^\alpha h_k(u)| \leqslant |\delta^\alpha u| + 3\sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{\textit{п.в. на}} \quad \Omega.$$

Доказательство. Имеем

$$h_k(u) = h_k(h_{2k}(u)). \tag{1.9}$$

Пусть α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$. В силу (1.9)

$$D^\alpha h_k(u) = h_k'(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u) \text{ п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя свойства функций h_k, h_{2k} и лемму 1.3, получаем, что $D^\alpha h_k(u) = h_k'(u)\delta^\alpha u$ п.в. на Ω, и тем самым утверждение 1) доказано.

Пусть теперь α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$. Используя (1.9), получаем

$$|D^\alpha h_k(u) - h_k'(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u)| \leqslant |h_k''(h_{2k}(u))| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta h_{2k}(u)|^2 \text{ п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая (1.5), (1.6) и лемму 1.3, выводим, что $|D^\alpha h_k(u)| \leqslant |\delta^\alpha u| + 3\sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2$ п.в. на Ω, и тем самым утверждение 2) доказано.

Отметим, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega), \tag{1.10}$$

и если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega),\ \alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u = D^\alpha u$ п.в. на Ω. Однако включение, обратное (1.10), вообще говоря, не верно (см. [2]).

Лемма 1.5. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1,q]$. *Пусть для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда в силу (1.3), леммы 1.4 и неравенства (1.5) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\biggl(\int_\Omega |h_k(u)|^{\lambda^*}\,dx\biggr)^{1/\lambda^*} \leqslant c_{n,\lambda}\biggl(\sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega |\delta^\alpha u|^\lambda\,dx\biggr)^{1/\lambda}.$$

Отсюда, поскольку $h_k(u) \to u$ поточечно в Ω, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда, учитывая, что $|h_k(u)| \leqslant |u|$ для любого $k \in \mathbb{N}$, имеем $h_k(u) \to u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 1.3, 1.4 и неравенства (1.5) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, имеем $D^\alpha h_k(u) \to \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \to u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1,p]$ *и для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Пусть для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$. В силу изложенного в доказательстве леммы 1.5 имеем $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \to u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 1.3 и 1.4 для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$, имеем $D^\alpha h_k(u) \to \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in W^{2,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \to u$ сильно в $W^{2,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

Положим для любых $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I(u,k) = \int_\Omega \biggl\{\sum_{|\alpha|=1}|\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2}|\delta^\alpha u|^p\biggr\} h_k'(u)\,dx.$$

Лемма 1.7. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant c_{n,q}^{q^*} k^{-q^*}[I(u,k)]^{q^*/q}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Поскольку $|h_k(u)| \geqslant k$ на $\{|u| \geqslant k\}$, имеем

$$k^{q^*}\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_\Omega |h_k(u)|^{q^*}\,dx. \tag{1.12}$$

Правую часть этого неравенства оценим, используя (1.3), лемму 1.4 и неравенство (1.5). Получим

$$\int_\Omega |h_k(u)|^{q^*}dx \leqslant c_{n,q}^{q^*}\biggl(\sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega |D^\alpha h_k(u)|^q\,dx\biggr)^{q^*/q} \leqslant c_{n,q}^{q^*}[I(u,k)]^{q^*/q}.$$

Отсюда и из (1.12) выводим (1.11). Лемма доказана.

Лемма 1.8. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, α *– n-мерный мультииндекс*, $|\alpha| = 1$, *и пусть* $k, k_1 \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant c_{n,q}^{q^*} k_1^{-q^*}[I(u,k_1)]^{q^*/q} + k^{-q} I(u,k_1). \tag{1.13}$$

Доказательство. Положим $G = \{|u| < k_1, |\delta^\alpha u| \geqslant k\}$. Имеем

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k_1\} + \operatorname{meas} G, \tag{1.14}$$

причем в силу леммы 1.7

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k_1\} \leqslant c_{n,q}^{q^*} k_1^{-q^*}[I(u,k_1)]^{q^*/q}. \tag{1.15}$$

Оценим $\operatorname{meas} G$. Поскольку $k \leqslant |\delta^\alpha u| h'_{k_1}(u)$ на G, имеем

$$k^q \operatorname{meas} G \leqslant \int_\Omega |\delta^\alpha u|^q h'_{k_1}(u)\,dx \leqslant I(u,k_1)$$

и, следовательно, $\operatorname{meas} G \leqslant k^{-q} I(u,k_1)$. Отсюда и из (1.14), (1.15) выводим (1.13). Лемма доказана.

Лемма 1.9. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, α *– n-мерный мультииндекс*, $|\alpha| = 2$, *и пусть* $k, k_1 \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant c_{n,q}^{q^*} k_1^{-q^*}[I(u,k_1)]^{q^*/q} + k^{-p} I(u,k_1).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.8.

Положим

$$r = \frac{n(q-1)}{n-1}\,.$$

Поскольку $q \in (2,n)$, имеем $r \in (1,q)$.

Лемма 1.10. *Пусть* $b_1, b_2 > 0$, $(n-1)/n < \sigma < 1$, Φ *– неотрицательная измеримая функция на* Ω *такая, что* $\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$I(u,k) \leqslant b_1 \int_\Omega \Phi |h_k(u)|\,dx + b_2. \tag{1.16}$$

Тогда:

1) $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$;

2) *для любого n-мерного мультииндекса* α, $|\alpha| = 2$, *имеем* $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$;

3) *если* $rp/q \geqslant 1$, *то* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Доказательство. Через $b_i,\ i=3,4,\dots,$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, q, b_1, b_2, σ, $\operatorname{meas}\Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции $\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma$.

Положим $q_1=\frac{q-1}{2q}$ и зафиксируем $k\in\mathbb{N},\ k>e$. В силу (1.16) имеем

$$I(u,k)\leqslant b_1\int_{\{\Phi\leqslant k^{q_1}\}}\Phi|h_k(u)|\,dx+b_1\int_{\{\Phi>k^{q_1}\}}\Phi|h_k(u)|\,dx+b_2. \tag{1.17}$$

Используя неравенство Гёльдера, неравенство (1.3), лемму 1.4 и (1.5), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\{\Phi\leqslant k^{q_1}\}}\Phi|h_k(u)|\,dx&\leqslant k^{q_1}\int_\Omega|h_k(u)|\,dx\\&\leqslant k^{q_1}(\operatorname{meas}\Omega)^{(q^*-1)/q^*}\biggl(\int_\Omega|h_k(u)|^{q^*}\,dx\biggr)^{1/q^*}\\&\leqslant k^{q_1}(\operatorname{meas}\Omega)^{(q^*-1)/q^*}c_{n,q}\biggl(\sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega|D^\alpha h_k(u)|^q\,dx\biggr)^{1/q}\\&\leqslant b_3k^{q_1}[I(u,k)]^{1/q}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Учитывая (1.4) и тот факт, что

$$\Phi<q_1^{-\sigma}(\ln k)^{-\sigma}\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma\quad\text{на}\quad\{\Phi>k^{q_1}\},$$

второй интеграл в правой части (1.17) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_{\{\Phi>k^{q_1}\}}\Phi|h_k(u)|\,dx&\leqslant 2k\int_{\{\Phi>k^{q_1}\}}\Phi\,dx\\&\leqslant 2kq_1^{-\sigma}(\ln k)^{-\sigma}\int_\Omega\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma\,dx=b_4k\,(\ln k)^{-\sigma}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.17)–(1.19), используя неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned}I(u,k)&\leqslant b_1b_3k^{q_1}[I(u,k)]^{1/q}+b_1b_4k(\ln k)^{-\sigma}+b_2\\&\leqslant\frac{1}{q}I(u,k)+\frac{q-1}{q}b_5[k^{1/2}+k(\ln k)^{-\sigma}].\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что для любого $k\in\mathbb{N},\ k>e$, справедливо неравенство

$$I(u,k)\leqslant b_6k(\ln k)^{-\sigma}. \tag{1.20}$$

Далее, пусть α – произвольный n-мерный мультииндекс такой, что $|\alpha|=1$. Зафиксируем $k\in\mathbb{N},\ k>e^{(n-1)/(n-q)}$. Ясно, что существует $\eta>e$ такое, что

$$\eta^{n-1}(\ln\eta)^\sigma=k^{n-q}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\eta^{-r^*}(\ln\eta)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-q}\eta(\ln\eta)^{-\sigma} = k^{-r}(\ln\eta)^{-\sigma n/(n-1)}, \tag{1.21}$$
$$k^{n-q} \leqslant \eta^n. \tag{1.22}$$

Пусть k_1 – минимальное натуральное число, большее η. Из соотношений (1.21) и (1.22) вытекают неравенства

$$k_1^{-r^*}(\ln k_1)^{-\sigma n/(n-q)} \leqslant b_7 k^{-r}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \tag{1.23}$$
$$k^{-q}\, k_1(\ln k_1)^{-\sigma} \leqslant b_8 k^{-r}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \tag{1.24}$$

Кроме того, поскольку $k_1 > e$, в силу (1.20) имеем

$$I(u,k_1) \leqslant b_6 k_1(\ln k_1)^{-\sigma}. \tag{1.25}$$

Теперь, используя лемму 1.8 и неравенства (1.23)–(1.25), получаем

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant b_9 k^{-r}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2 имеем $\delta^\alpha u \in L^r(\Omega)$.

Таким образом, для любого n-мерного мультииндекса $\alpha,\ |\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^r(\Omega)$. Отсюда и из леммы 1.5 выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, и тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть α – произвольный n-мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N},\ k > e^{q(n-1)/p(n-q)}$. Ясно, что существует $y > e$ такое, что

$$y^{n-1}(\ln y)^\sigma = k^{p(n-q)/q}.$$

Из этого равенства следует, что

$$y^{-r^*}(\ln y)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-p}\, y\,(\ln y)^{-\sigma} = k^{-rp/q}(\ln y)^{-\sigma n/(n-1)}, \tag{1.26}$$
$$k^{p(n-q)} \leqslant y^{qn}. \tag{1.27}$$

Пусть k_2 – минимальное натуральное число, большее y. Из соотношений (1.26) и (1.27) вытекают неравенства

$$k_2^{-r^*}(\ln k_2)^{-\sigma n/(n-q)} \leqslant b_{10} k^{-rp/q}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \tag{1.28}$$
$$k^{-p} k_2(\ln k_2)^{-\sigma} \leqslant b_{11} k^{-rp/q}(\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \tag{1.29}$$

Кроме того, поскольку $k_2 > e$, в силу (1.20) имеем

$$I(u,k_2) \leqslant b_6 k_2(\ln k_2)^{-\sigma}. \tag{1.30}$$

Используя лемму 1.9 и неравенства (1.28)–(1.30), устанавливаем, что

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant b_{12} k^{-rp/q} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2 имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$. Тем самым справедливость утверждения 2) леммы доказана.

Остается установить справедливость утверждения 3) леммы. Предположим, что $rp/q \geqslant 1$. Тогда $rp/q \in [1, p]$. Поскольку $2p < q$, имеем $2rp/q < r$, и тогда в силу установленного выше, при доказательстве утверждения 1) леммы, для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2rp/q}(\Omega)$. Теперь, учитывая утверждение 2) и используя лемму 1.6, получаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,rp/q}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) леммы справедливо, и тем самым ее доказательство завершено.

Лемма 1.11. *Пусть* $b', b'' > 0$, $1 \leqslant m < nq/(nq - n + q)$, $\Phi \in L^m(\Omega)$, $\Phi \geqslant 0$ *на* Ω. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$I(u,k) \leqslant b' \int_\Omega \Phi |h_k(u)|\, dx + b''. \tag{1.31}$$

Тогда:

1) *если* $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, *то* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$;

2) *если* α – n-*мерный мультииндекс*, $|\alpha| = 2$, *и* $\lambda \in \left(0, \frac{p}{q}(q-1)m^*\right)$, *то* $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;

3) *если* $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ *и* $\lambda \in \left[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\right)$, *то* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия леммы имеем $mq < n$, $(m-1)q^* < m$.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{m-1}{m} q^*, \qquad m_2 = \frac{(m-1)q^*}{mq}, \qquad m_3 = \frac{n - mq}{n - m}, \qquad \theta = \frac{nm(q-1)}{n - mq}.$$

Ясно, что $0 < m_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant m_2 < 1$. Кроме того, имеем

$$q^* \left[1 - \frac{m_1}{(1-m_2)q}\right] = \theta, \tag{1.32}$$

$$m_3 \theta = q - \frac{m_1 m_3}{1 - m_2}. \tag{1.33}$$

Далее через b_i, $i = 13, 14, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, q, b', b'', m и нормы в $L^m(\Omega)$ функции Φ.

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $m > 1$. Тогда $m_1 < 1$ и, используя (1.31), (1.4) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} I(u,k) &\leqslant b'(2k)^{m_1} \int_\Omega \Phi |h_k(u)|^{1-m_1}\, dx + b'' \\ &\leqslant b'(2k)^{m_1} \|\Phi\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega |h_k(u)|^{q^*}\, dx \right)^{(m-1)/m} + b''. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (1.3), (1.5) и леммы 1.4 вытекает, что

$$I(u,k) \leqslant b_{13} k^{m_1} [I(u,k)]^{m_2} + b''.$$

Следовательно,

$$I(u,k) \leqslant b_{14} k^{m_1/(1-m_2)}. \tag{1.34}$$

Легко проверить, что это же неравенство верно и в случае $m = 1$.

Таким образом, доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство (1.34).

Далее, пусть $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$ и α – n-мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{m_3} < k_1 \leqslant 2k^{m_3}. \tag{1.35}$$

В силу (1.34) и (1.35) имеем $I(u, k_1) \leqslant b_{15} k^{m_1 m_3/(1-m_2)}$. Используя это неравенство, лемму 1.8 и соотношения (1.35), (1.32), (1.33), находим

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant b_{16} k^{-m_3\theta}.$$

Тогда в силу леммы 1.1 $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Отсюда, учитывая неравенство $(q-1)m^* < q$ и применяя лемму 1.5, выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2) леммы. Пусть α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in \big(0, \frac{p}{q}(q-1)m^*\big)$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{pm_3/q} < k_2 \leqslant 2k^{pm_3/q}. \tag{1.36}$$

В силу (1.34) и (1.36) имеем $I(u, k_2) \leqslant b_{17} k^{pm_1 m_3/q(1-m_2)}$. Используя это неравенство, лемму 1.9 и соотношения (1.36), (1.32), (1.33), получаем

$$\operatorname{meas}\{|\delta^\alpha u| \geqslant k\} \leqslant b_{18} k^{-pm_3\theta/q}.$$

Теперь, учитывая лемму 1.1, заключаем, что $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$, и тем самым утверждение 2) леммы доказано.

Докажем утверждение 3). Пусть $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in \big[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\big)$. Имеем $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1;q}_{2,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1,p]$. Кроме того, $2\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, и тогда в силу установленного при доказательстве утверждения 1) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Наконец, согласно утверждению 2) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Используя теперь лемму 1.6, заключаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) леммы справедливо, и тем самым ее доказательство завершено.

§ 2. О суммируемости решений задачи Дирихле

Пусть $c_1, c_2 > 0$, g_1, g_2 – неотрицательные функции на Ω, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $A_\alpha\colon \Omega\times\mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ – функция Каратеодори для любого $\alpha \in \Lambda$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant c_1\biggl\{\sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p\biggr\} + g_1(x), \tag{2.1}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_2\biggl\{\sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p\biggr\} - g_2(x). \tag{2.2}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.3}$$

$$D^\alpha u = 0, \qquad |\alpha| = 0, 1, \qquad\qquad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.4}$$

Введем отображение: если $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, то $\delta_2 u\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\delta_2 u(x))_\alpha = \delta^\alpha u(x)$.

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Lambda$, то существуют конечные интегралы функций $A_\alpha(x, \delta_2 u)\delta^\alpha u$ и $A_\alpha(x, \delta_2 u)\delta^\alpha \varphi$ по множеству $\{|u-\varphi| < 2k\}$. Это вытекает из (2.1) и леммы 1.3.

Определение 2.1. *Энтропийным решением задачи* (2.3), (2.4) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, удовлетворяющую условию: существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ [1], [2]

$$\int_{\{|u-\varphi|<2k\}} \biggl\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi)\biggr\} h_k'(u-\varphi)\,dx \leqslant \int_\Omega f h_k(u-\varphi)\,dx + c[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}.$$

Положим

$$p_1 = \frac{(3n-2)p}{n+p-1}\,, \qquad p_2 = \frac{np}{n(p-1)+1}\,.$$

Поскольку $p \in (1, n/2)$, имеем $p_1 \in (2p, n)$, $p_2 \in (1, n)$.

Замечание 2.1. Из результатов [1], [2] следует, что если $q > p_1$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} [A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0, \tag{2.5}$$

то существует единственное энтропийное решение u задачи (2.3), (2.4), причем

1) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$;

2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \biggl\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)\delta^\alpha \varphi\biggr\}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Лемма 2.1. *Пусть u – энтропийное решение задачи* (2.3), (2.4). *Тогда существуют $c', c'' > 0$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$I(u,k) \leqslant c' \int_\Omega |f|\,|h_k(u)|\,dx + c''. \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу определения 2.1 существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u|<2k\}} \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\delta_2 u)\delta^\alpha u \Big\} h_k'(u)\,dx \leqslant \int_\Omega f h_k(u)\,dx + c. \tag{2.7}$$

Положим

$$c' = \frac{1}{c_2}, \qquad c'' = \frac{1}{c_2}(\|g_2\|_{L^1(\Omega)} + c).$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Используя (2.2) и (1.5), устанавливаем, что

$$c_2 I(u,k) \leqslant \int_{\{|u|<2k\}} \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\delta_2 u)\delta^\alpha u \Big\} h_k'(u)\,dx + \|g_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из неравенства (2.7) выводим (2.6). Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $(n-1)/n < \sigma < 1$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи* (2.3), (2.4). *Тогда*:

1) $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$;

2) *для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$*;

3) *если $q \geqslant p_2$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,rp/q}(\Omega)$.*

Этот результат вытекает из лемм 2.1 и 1.10.

Следствие 2.1. *Пусть $p \geqslant 3/2 - 1/n$, и пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{2,rp/q}(\Omega)$.*

Для доказательства этого результата достаточно воспользоваться теоремой 2.1, а затем учесть, что $q > 2p$ и в силу неравенства $p \geqslant 3/2 - 1/n$ справедливо неравенство $p_2 \leqslant 2p$.

Теорема 2.2. *Пусть $1 \leqslant m < nq/(nq - n + q)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи* (2.3), (2.4). *Тогда*:

1) *если $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$*;

2) *если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in \big(0, \frac{p}{q}(q-1)m^*\big)$, то $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$*;

3) *если $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in \big[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\big)$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$.*

Этот результат вытекает из лемм 2.1 и 1.11.

Следствие 2.2. *Пусть* $q > p_2$, *и пусть выполняются условия теоремы* 2.2. *Тогда* $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$, *и для любого* $\lambda \in \left[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\right)$ *имеем* $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться теоремой 2.2 и тем, что из $q > p_2$ вытекает неравенство $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$.

Замечание 2.2. Нетрудно проверить, что если $q \leqslant p_2$, то $nq/(npq-np+q) \geqslant 1$.

Следствие 2.3. *Пусть* $q \leqslant p_2$, $nq/(npq-np+q) < m < nq/(nq-n+q)$ *и* $f \in L^m(\Omega)$. *Пусть* u – *энтропийное решение задачи* (2.3), (2.4). *Тогда* $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ *и для любого* $\lambda \in \left[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\right)$ *имеем* $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из теоремы 2.2 и замечания 2.2.

В заключение приведем несколько утверждений для слабых решений задачи (2.3), (2.4).

Определение 2.2. W-*решением задачи* (2.3), (2.4) будем называть функцию $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

1) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$;

2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha \varphi \right\} dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

Замечание 2.3. Из результатов работы [2, § 7, леммы 2.5, 2.6, 8.1, 8.2] и лемм 1.4, 1.6 настоящей статьи вытекает, что если $q > p_2$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (2.5), то существуют W-решение u задачи (2.3), (2.4) и положительные постоянные c', c'' такие, что $u \in \mathring{H}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (2.6).

Теорема 2.3. *Пусть* $q > p_2$ *и для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, *имеет место неравенство* (2.5). *Пусть* $(n-1)/n < \sigma < 1$ *и* $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. *Тогда существует* W-*решение* u *задачи* (2.3), (2.4) *такое, что* $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Теорема 2.4. *Пусть* $q > p_2$ *и для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, *имеет место неравенство* (2.5). *Пусть* $1 \leqslant m < nq/(nq-n+q)$ *и* $f \in L^m(\Omega)$. *Тогда существует* W-*решение* u *задачи* (2.3), (2.4) *такое, что для любого* $\lambda \in \left[1, \frac{p}{q}(q-1)m^*\right)$ *справедливо включение* $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Сформулированные теоремы являются следствиями замечания 2.3 и лемм 1.10, 1.11.

Замечание 2.4. Если $m \geqslant nq/(nq-n+q)$, $f \in L^m(\Omega)$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geqslant 0,$$

то существует W-решение u задачи (2.3), (2.4) такое, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Это следует из того, что при указанных условиях функция f естественным образом порождает линейный непрерывный функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и рассматриваемая задача вкладывается в обычную схему теории монотонных операторов (см., например, [8]).

Список литературы

1. *Kovalevsky A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1-data // Nonlinear Boundary Value Problems. 1999. V. 9. P. 46–54.
2. *Ковалевский А.А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №2. С. 27–80.
3. *Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L.* An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.
4. *Boccardo L., Gallouët T.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.
5. *Boccardo L., Gallouët T.* Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 641–655.
6. *Ковалевский А.А.* О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №3. С. 375–385.
7. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
8. *Lions J.L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

E-mail: `alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua`

Поступило в редакцию
31.I.2001