УДК 517.98

© 1994 А.А. КОВАЛЕВСКИЙ

G-СХОДИМОСТЬ И УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Изучаются понятия G-сходимости и сильной G-сходимости последовательности эллиптических операторов $A_s: W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, где Ω_s, $s = 1, 2, \ldots$, – перфорированные области, содержащиеся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Устанавливается, что G-сходимость операторов A_s сопровождается сходимостью решений некоторых уравнений и вариационных неравенств, связанных с операторами A_s, доказывается теорема о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности. Показывается, что при условии периодичности перфорации областей Ω_s и определенных предположениях относительно коэффициентов операторов A_s имеет место сильная G-сходимость $\{A_s\}$ к оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

Введение

В настоящее время достаточно хорошо развита теория G-сходимости дифференциальных операторов дивергентного вида с единой областью определения (см., например, [1–11]). В рамках этой теории изучены задачи усреднения для линейных и нелинейных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами в постоянной области. Представляет интерес построение аналогичной теории для операторов с переменной областью определения и ее приложение к усреднению краевых задач в переменных (например, перфорированных) областях. В связи с этим отметим, что в работах по усреднению краевых задач в перфорированных областях в основном изучены задачи для вариационных уравнений [12–24] и задача Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида второго порядка [25–28]. Результаты же данной работы о G-сходимости операторов с переменной областью определения позволяют для некоторых типов перфорированных областей решить вопрос об усреднении в таких областях задачи Неймана для нелинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 изучается G-сходимость абстрактных операторов с переменной областью определения. Описывается связь G-сходимости операторов со сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств. Доказывается теорема о выборе из рассматриваемой последовательности операторов G-сходящейся подпоследовательности.

В § 2 изучаются понятия G-сходимости и сильной G-сходимости последовательности эллиптических операторов A_s дивергентного вида, действующих из соболевских пространств $W^{1,m}(\Omega_s)$ в сопряженные с ними пространства $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, где Ω_s, $s = 1, 2, \ldots$, – некоторые перфорированные области, содержащиеся в фиксированной ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Относительно коэффициентов операторов A_s предполагаются выполненными определенные условия регулярности и монотонности. С помощью результатов § 1 устанавливается, что G-сходимость операторов A_s сопровождается сходимостью решений некоторых уравнений, связанных с операторами A_s, а также вариационных неравенств с препятствиями, доказывается теорема о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности. Наконец, показывается, что при условии периодичности перфорации областей Ω_s и некоторых дополнительных предположениях относительно коэффициентов операторов A_s имеет место усреднение этих операторов, т.е. их сильная G-сходимость к оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

Рассматриваемые понятия G-сходимости и сильной G-сходимости операторов A_s – аналоги понятий G-сходимости и сильной G-сходимости эллиптических операторов с единой областью определения [4, 9]. Отметим, что существенным моментом получения результата о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности является включение операторов A_s в семейство так называемых сдвинутых операторов $A_s^{\varphi,\psi}$ аналогичного вида, параметризованных функциями $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$. Для доказательства сильной G-компактности нелинейных эллиптических операторов с единой областью определения идея включения этих операторов в семейство сдвинутых операторов была предложена в [8, 9]. Отметим еще, что общая теорема выбора для вариационных задач в перфорированных областях доказана в [40]. Наконец, заметим, что все результаты § 2, кроме относящихся к вариационным неравенствам с препятствиями, могут быть перенесены на случай операторов, определенных на пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$, $k > 1$.

Отдельные результаты статьи анонсированы или доказаны автором в работах [29–34].

§ 1. G-сходимость абстрактных операторов

1.1. Предположения и обозначения. Для любого $s \in \mathbf{N}$ W_s – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_s$. Если $s \in \mathbf{N}$, то θ_s – нуль в W_s, $\|\cdot\|_{0,s}$ – некоторая вспомогательная норма в W_s, W_s^* – пространство, сопряженное с W_s, $\|\cdot\|_{*,s}$ – норма в W_s^*. W – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, θ – нуль в W, $\|\cdot\|_0$ – вспомогательная норма в W, относительно которой шар $\{u \in W: \|u\| \leqslant 1\}$ есть предкомпакт, W^* – пространство, сопряженное с W, $\|\cdot\|_*$ – норма в W^*.

Для любого $s \in \mathbf{N}$ q_s – линейное отображение W в W_s. Выполняются условия:

если $u \in W$, $s \in \mathbf{N}$, то $\|q_s u\|_s \leqslant \|u\|$, $\|q_s u\|_{0,s} \leqslant \|u\|_0$; (1.1)

если $u \in W$ и $\varliminf\limits_{s\to\infty} \|q_s u\|_{0,s} = 0$, то $u = \theta$. (1.2)

Для любого $s \in \mathbf{N}$ $\mathcal{L}_s$ – множество всех линейных непрерывных отображений W_s в W. $\mathcal{P}$ – множество всех последовательностей $\{p_s\}$, удовлетворяющих следующим условиям: для любого $s \in \mathbf{N}$ $p_s \in \mathcal{L}_s$; $\sup\limits_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} < \infty$; если $s \in \mathbf{N}$, $u \in W_s$, то $q_s(p_s u) = u$. Предполагается, что $\mathcal{P} \neq \varnothing$,

$$\kappa = \inf\left\{\sup_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} : \{p_s\} \in \mathcal{P}\right\}.$$

Заметим, что $\kappa \geqslant 1$. Действительно, взяв $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $s \in \mathbf{N}$, $u \in W_s$, $u \neq \theta_s$, в силу (1.1) имеем

$$\|u\|_s = \|q_s(p_s u)\|_s \leqslant \|p_s u\| \leqslant \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} \|u\|_s .$$

Следовательно, $\sup\limits_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} \geqslant 1$. А поскольку здесь $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ произвольна, то $\kappa \geqslant 1$.

1.2. Определения и вспомогательные предложения.

Определение 1.1. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$. Будем говорить, что *последовательность* $\{u_s\}$ *ограничена,* если ограничена последовательность норм $\|u_s\|_s$. Аналогично, если для любого $s \in \mathbf{N}$ $f_s \in W_s^*$, то ограниченность последовательности $\{f_s\}$ означает ограниченность последовательности норм $\|f_s\|_{*,s}$.

Определение 1.2. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ *слабо сходится* к u, если последовательность $\{u_s\}$ ограничена и $\lim\limits_{s\to\infty} \|u_s - q_s u\|_{0,s} = 0$.

Легко видеть, что если $u \in W$, то последовательность $\{q_s u\}$ слабо сходится к u.

Предложение 1.1. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$, *причем последовательность* $\{u_s\}$ *ограничена. Тогда из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Возьмем $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Последовательность $\{p_s u_s\}$ ограничена в W и, следовательно, в силу рефлексивности W существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ и $u \in W$ такие, что $p_{s_t} u_{s_t} \to u$ слабо в W. Тогда, используя предположение относительно нормы $\|\cdot\|_0$, получаем, что $\|p_{s_t} u_{s_t} - u\|_0 \to 0$. Отсюда и из (1.1) выводим, что последовательность $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к u. Предложение доказано.

Предложение 1.2. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$, *причем последовательность* $\{u_s\}$ *слабо сходится к* u. *Тогда для любой последовательности* $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ $p_s u_s \to u$ *слабо в* W.

Доказательство. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Предположим, что последовательность $\{p_s u_s\}$ не сходится слабо к u в W. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ и $\upsilon \in W$, $\upsilon \neq u$, такие, что $p_{s_t} u_{s_t} \to \upsilon$ слабо в W. Отсюда и из слабой сходимости $\{u_s\}$ к u вытекает, что $\varliminf\limits_{s\to\infty} \|q_s(\upsilon - u)\|_{0,s} = 0$. Из этого равенства и условия (1.2) следует, что $\upsilon = u$. Но это противоречит неравенству $\upsilon \neq u$. Полученное противоречие говорит о том, что $p_s u_s \to u$ слабо в W. Предложение доказано.

Предложение 1.3. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$, *причем последовательность* $\{u_s\}$ *слабо сходится к* u. *Тогда*

$$\varliminf_{s\to\infty} \|u_s\|_s \geqslant \kappa^{-1} \|u\|. \tag{1.3}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ такую, что

$$\sup_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} \leqslant \kappa + \varepsilon. \tag{1.4}$$

В силу предложения 1.2. $\varliminf\limits_{s\to\infty} \|p_s u_s\| \geqslant \|u\|$. Отсюда и из (1.4) вытекает, что

$$\varliminf_{s\to\infty} \|u_s\|_s \geqslant (\kappa + \varepsilon)^{-1} \|u\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (1.3). Предложение доказано.

Определение 1.3. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s, u \in W$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ *сильно сходится* к u, если $\lim\limits_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_s = 0$.

Используя условие (1.1), легко показать, что сильная сходимость последовательности $u_s \in W_s$ к $u \in W$ влечет слабую сходимость этой последовательности к u.

Определение 1.4. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$. Будем говорить, что последовательность $\{f_s\}$ *сильно сходится* к f, если из того, что для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, следует равенство

$$\lim_{s\to\infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Из предложения 1.2 вытекает, что если $f \in W^*$ и $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, то последовательность $\{f \circ p_s\}$ сильно сходится к f.

Предложение 1.4. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$, *причем последовательность* $\{f_s\}$ *сильно сходится к* f. *Тогда для любой последовательности* $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ *имеем*

$$\lim_{s\to\infty} \| f_s - f \circ p_s \|_{*,s} = 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Предположим, что последовательность норм $\| f_s - f \circ p_s \|_{*,s}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ такие, что

$$\forall t \in \mathbf{N} \quad \| f_{s_t} - f \circ p_{s_t} \|_{*,s_t} \geqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

Положим для любого $t \in \mathbf{N}$ $g_t = f_{s_t} - f \circ p_{s_t}$. Из (1.6) следует, что найдется ограниченная последовательность $w_t \in W_{s_t}$ такая, что

$$\forall t \in \mathbf{N} \quad \langle g_t, w_t \rangle \geqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.7}$$

Поскольку последовательность $\upsilon_t = p_{s_t} w_t$ ограничена в W, существуют возрастающая последовательность $\{t_i\} \subset \mathbf{N}$ и $\upsilon \in W$ такие, что $\upsilon_{t_i} \to \upsilon$ слабо в W. Отсюда и из сильной сходимости $\{f_s\}$ к f следует, что $\langle g_{t_i}, w_{t_i} \rangle \to 0$. Но это противоречит (1.7). Полученное противоречие доказывает (1.5).

Предложение 1.5. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$, *причем последовательность* $\{f_s\}$ *сильно сходится к* f. *Тогда*

$$\varliminf_{s\to\infty} \| f_s \|_{*,s} \geqslant \| f \|_*, \tag{1.8}$$

$$\varlimsup_{s\to\infty} \| f_s \|_{*,s} \leqslant \kappa \| f \|_*. \tag{1.9}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $u \in W$, причем $\| u \| \leqslant 1$ и

$$\| f \|_* \leqslant \langle f, u \rangle + \varepsilon. \tag{1.10}$$

Используя сильную сходимость $\{f_s\}$ к f, слабую сходимость $\{q_s u\}$ к u и (1.1), устанавливаем, что

$$\langle f, u \rangle = \lim_{s\to\infty} \langle f_s, q_s u \rangle \leqslant \varliminf_{s\to\infty} \| f_s \|_{*,s}.$$

Отсюда и из (1.10) вытекает неравенство

$$\varliminf_{s\to\infty} \| f_s \|_{*,s} \geqslant \| f \|_* - \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (1.8).

Получим теперь (1.9). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}'$ такую, что

$$\sup_s \| p_s \|_{\mathcal{L}_s} \leqslant \kappa + \varepsilon. \tag{1.11}$$

Для любого $s \in \mathbf{N}$ имеем

$$\| f_s \|_{*,s} \leqslant \| f \circ p_s \|_{*,s} + \| f_s - f \circ p_s \|_{*,s}.$$

Отсюда, используя (1.11), сильную сходимость $\{f_s\}$ к f и предложение 1.4, выводим, что

$$\varlimsup_{s\to\infty} \| f_s \|_{*,s} \leqslant (\kappa + \varepsilon) \| f \|_*.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (1.9). Предложение доказано.

1.3. Последовательность операторов A_s: $W_s \to \overset{*}{W}_s$ и определение ее G-сходимости. Пусть $m > 1$, $m' = m/(m-1)$, $0 < m_1 \leqslant \min(m, m')$, $m_2 \geqslant \max(m, 2)$, $\lambda \geqslant 1$, и пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ A_s – оператор из W_s в $\overset{*}{W}_s$, причем $\sigma \equiv \sup_s \| A_s \theta_s \|_{*,s} < \infty$ и для любых $s \in \mathbf{N}$, u, $\upsilon \in W_s$ справедливы неравенства

$$\| A_s u - A_s \upsilon \|_{*,s}^{m'} \leqslant \lambda (1 + \| u \|_s + \| \upsilon \|_s)^{m - m_1} \| u - \upsilon \|_s^{m_1}, \tag{1.12}$$

$$\langle A_s u - A_s \upsilon, u - \upsilon \rangle \geqslant \lambda^{-1} (1 + \| u \|_s + \| \upsilon \|_s)^{m - m_2} \| u - \upsilon \|_s^{m_2}. \tag{1.13}$$

Получим некоторые полезные в дальнейшем следствия из этих неравенств. Положим $\mu = 2^{m_2} \lambda (\sigma + 1)$. Из (1.12), (1.13) выводим, что для $s \in \mathbf{N}$ и $u \in W_s$

$$\| A_s u \|_{*,s}^{m'} \leqslant \mu^{m'} (\| u \|_s^m + 1), \tag{1.14}$$

$$\langle A_s u, u \rangle \geqslant \mu^{-1} \| u \|_s^m - \mu^{m'}. \tag{1.15}$$

В силу неравенств (1.12)–(1.15) операторы A_s обратимы [35]. Используя (1.15) и неравенство Юнга, устанавливаем, что для $s \in \mathbf{N}$ и $f \in \overset{*}{W}_s$

$$\| A_s^{-1} f \|_s^m \leqslant \mu^{m'} \| f \|_{*,s}^{m'} + m' \mu^{m'+1}. \tag{1.16}$$

Отсюда и из (1.13) выводим, что для $s \in \mathbf{N}$ и $f, g \in W_s^*$

$$\| A_s^{-1} f - A_s^{-1} g \|_s \leqslant m' \mu^{m'+1} (1 + \| f \|_{*,s} + \| g \|_{*,s})^{\frac{1}{m-1}} \| f - g \|_{*,s}^{\frac{1}{m_2 - 1}}. \tag{1.17}$$

Определение 1.5. Пусть A – обратимый оператор из W в W^*. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ *G-сходится к оператору A*, если из того, что для любого $s \in \mathbf{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f, вытекает, что последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.

Данное определение является аналогом определения G-сходимости абстрактных операторов с единой областью задания [4].

В следующем пункте будет полезен такой результат.

Предложение 1.6. *Пусть A – обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Тогда оператор A строго монотонен.*

Доказательство. Пусть $u, \upsilon \in W$, причем $u \neq \upsilon$. Возьмем последовательности $f_s, g_s \in W_s^*$, сильно сходящиеся соответственно к Au, $A\upsilon$, и положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$, $\upsilon_s = A_s^{-1} g_s$. В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательности $\{u_s\}$, $\{\upsilon_s\}$ слабо сходятся соответственно к u, υ. Из (1.13) следует, что для произвольного $s \in \mathbf{N}$

$$\|u_s - \upsilon_s\|_s^{m_2} \leqslant \lambda(1 + \|u_s\|_s + \|\upsilon_s\|_s)^{m_2 - m} \langle f_s - g_s, u_s - \upsilon_s \rangle.$$

Отсюда, используя ограниченность последовательностей $\{u_s\}$, $\{\upsilon_s\}$, сильную сходимость $\{f_s - g_s\}$ к $Au - A\upsilon$, слабую сходимость $\{u_s - \upsilon_s\}$ к $u - \upsilon$ и предложение 1.3, выводим, что при некотором $c > 0$

$$\|u - \upsilon\|^{m_2} \leqslant c\langle Au - A\upsilon, u - \upsilon \rangle.$$

Из этого неравенства и неравенства $u \neq \upsilon$ вытекает, что $\langle Au - A\upsilon, u - \upsilon \rangle > 0$. Следовательно, оператор A строго монотонен. Предложение доказано.

Другие свойства G-предельного оператора будут получены в п. 1.5.

1.4. О связи G-сходимости операторов A_s со сходимостью решений операторных уравнений и вариационных неравенств. Непосредственно из определения 1.5 вытекает, что если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору A: $W \to W^*$, последовательность $f_s \in W_s^*$ сильно сходится к $f \in W^*$, то решения u_s уравнений $A_s u = f_s$ слабо сходятся к решению уравнения $Au = f$.

Сформулируем один результат относительно решений уравнений $A_s u + T_s u = f_s$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть A – обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ T_s – оператор из W_s в W_s^*, T – оператор из W в W^*, причем выполняется условие:*

если последовательность $\upsilon_s \in W_s$ слабо сходится к
$\upsilon \in W$, то последовательность $\{T_s \upsilon_s\}$ сильно сходится к $T\upsilon$. (1.18)

Пусть последовательность $f_s \in W_s^*$ сильно сходится к $f \in W^*$, последовательность $u_s \in W_s$ слабо сходится к $u \in W$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $A_s u_s + T_s u_s = f_s$. Тогда $Au + Tu = f$.

Доказательство. Так как для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = A_s^{-1}(f_s - T_s u_s)$ и ввиду условия (1.18) $\{f_s - T_s u_s\}$ сильно сходится к $f - Tu$, то в силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к $A^{-1}(f - Tu)$. Но поскольку $\{u_s\}$ слабо сходится к u и в силу (1.2) слабый предел единствен, то $u = A^{-1}(f - Tu)$. Следовательно, $Au + Tu = f$, и тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть A – обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ V_s – непустое множество в W_s, V – непустое множество в W, причем выполняются условия:*

если последовательность $\upsilon_s \in W_s$ слабо сходится к
$\upsilon \in W$, N_1 – бесконечное подмножество $\mathbf{N}$ и $\forall s \in N_1$ (1.19)
$\upsilon_s \in V_s$, то $\upsilon \in V$;

если последовательность $g_s \in W_s^*$ сильно сходится
к $g \in A(V)$, то существует последовательность
$w_s \in V_s$ такая, что $\lim\limits_{s \to \infty} \|w_s - A_s^{-1} g_s\|_s = 0$. (1.20)

Пусть последовательность $f_s \in W_s^*$ *сильно сходится к* $f \in W^*$; $\forall s \in \mathbf{N}$ $u_s \in V_s$;

$$\forall s \in \mathbf{N}, \forall \upsilon \in V_s \quad \langle A_s u_s - f_s, \upsilon - u_s \rangle \geq 0. \tag{1.21}$$

Тогда существует элемент $u \in V$ *такой, что*

а) $\forall \upsilon \in V \quad \langle Au - f, \upsilon - u \rangle \geq 0$;

б) *последовательность* $\{u_s\}$ *слабо сходится к* u;

в) *последовательность* $\{A_s u_s\}$ *сильно сходится к* Au.

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность $\{u_s\}$ ограничена. Действительно, в силу условия (1.20) существует ограниченная последовательность $y_s \in V_s$. Согласно (1.21) для произвольного $s \in \mathbf{N}$ $\langle A_s u_s - f_s, y_s - u_s \rangle \geq 0$. Отсюда, используя ограниченность последовательностей $\{f_s\}$, $\{y_s\}$, неравенства (1.14), (1.15), получаем, что $\{u_s\}$ ограничена. Тогда в силу предложения 1.1 существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ и $u \in W$ такие, что $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к u. Отсюда и из условия (1.19) вытекает, что $u \in V$.

Зафиксируем последовательность $g_s \in W_s^*$, сильно сходящуюся к Au. Согласно условию (1.20) существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что

$$\lim_{s \to \infty} \| w_s - A_s^{-1} g_s \|_s = 0. \tag{1.22}$$

Отсюда и из того, что в силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{A_s^{-1} g_s\}$ слабо сходится к u, вытекает, что и последовательность $\{w_s\}$ слабо сходится к u. Кроме того, из (1.22) и (1.12) следует, что

$$\lim_{s \to \infty} \| A_s w_s - g_s \|_{*,s} = 0. \tag{1.23}$$

Положим $\tau = \sup_s (\| u_s \|_s + \| w_s \|_s)$. Для произвольного $s \in \mathbf{N}$ имеем

$$\langle A_s u_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle = \langle A_s u_s - f_s, u_s - w_s \rangle + \langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle + \langle g_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle.$$

Из этого равенства, используя (1.13) и (1.21), получаем, что

$$\| u_s - w_s \|_s^{m_2} \leq \lambda (1 + \tau)^{m_2 - m} (\langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle + \tau \| A_s w_s - g_s \|_{*,s}). \tag{1.24}$$

Отсюда, учитывая (1.23), сильную сходимость $\{f_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к f, Au и слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$, $\{w_s\}$ к u, выводим, что последовательность $\{u_{s_t} - w_{s_t}\}$ сильно сходится к θ. Тогда в силу (1.12)

$$\lim_{t \to \infty} \| A_{s_t} u_{s_t} - A_{s_t} w_{s_t} \|_{*,s_t} = 0. \tag{1.25}$$

Перейдем к непосредственному доказательству предложений а) – в) заключения теоремы. Пусть υ – произвольный элемент из V. Из условия (1.20) и G-сходимости $\{A_s\}$ к A следует, что существует последовательность $\upsilon_s \in V_s$, слабо сходящаяся к υ. Положим $\tau_1 = \sup_s \| \upsilon_s \|_s$. Для произвольного $s \in \mathbf{N}$ имеем

$$\langle g_s - f_s, \upsilon_s - u_s \rangle = \langle g_s - A_s w_s, \upsilon_s - u_s \rangle + \langle A_s w_s - A_s u_s, \upsilon_s - u_s \rangle + \langle A_s u_s - f_s, \upsilon_s - u_s \rangle.$$

Из этого равенства и (1.21) вытекает, что

$$\langle g_s - f_s, \upsilon_s - u_s \rangle \geq -(\tau + \tau_1)(\| A_s w_s - g_s \|_{*,s} + \| A_s u_s - A_s w_s \|_{*,s}).$$

Отсюда, используя (1.23), (1.25), сильную сходимость $\{g_s\}$, $\{f_s\}$ соответственно к Au, f и слабую сходимость $\{\upsilon_s\}$, $\{u_{s_t}\}$ соответственно к υ, u, выводим неравенство $\langle Au - f, \upsilon - u \rangle \geq 0$, и тем самым предложение а) доказано.

Покажем справедливость предложения б). Предположим, что последовательность $\{u_s\}$ не сходится слабо к u. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s'_t\} \subset \mathbf{N}$ и $u' \in W$ такие, что $\{u_{s'_t}\}$ слабо сходится к u' и $u' \neq u$. Аналогично тому, как доказано выше для u, имеем $u' \in V$ и $\forall \upsilon \in V \quad \langle Au' - f, \upsilon - u' \rangle \geqslant 0$. Отсюда и из предложения а) следует, что $\langle Au - Au', u - u' \rangle \leqslant 0$. Но так как $u \neq u'$ и в силу предложения 1.6 оператор A строго монотонен, то $\langle Au - Au', u - u' \rangle > 0$. Полученное противоречие говорит о том, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, и тем самым предложение б) доказано.

Остается показать справедливость предложения в). Из (1.24), используя (1.23), сильную сходимость $\{f_s - g_s\}$ к $f - Au$ и слабую сходимость $\{u_s - w_s\}$ к θ, выводим, что $\{u_s - w_s\}$ сильно сходится к θ. Тогда в силу (1.12)

$$\lim_{s \to \infty} \| A_s u_s - A_s w_s \|_{*,s} = 0.$$

Используя это равенство, а также равенство (1.23) и сильную сходимость $\{g_s\}$ к Au, устанавливаем, что последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au и, значит, предложение в) справедливо. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Решения $u_s \in V_s$ вариационных неравенств (1.21) существуют в предположении о замкнутости и выпуклости множеств V_s в соответствующих пространствах W_s [35].

Рассмотрим некоторые примеры выполнения условий (1.19) и (1.20).

П р и м е р 1.1. Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$ $\varphi_s : W_s \to \mathbf{R}$ – выпуклый функционал, $\varphi_s(\theta_s) \leqslant 0$, $\varphi: W \to \mathbf{R}$, причем выполняется условие:

если последовательность $\upsilon_s \in W_s$ слабо сходится к

$$\upsilon \in W, \text{ то } \lim_{s \to \infty} \varphi_s(\upsilon_s) = \varphi(\upsilon). \tag{1.26}$$

Пусть $\alpha > 0$, $\forall s$

$$V_s = \{u \in W_s : \varphi_s(u) \leqslant \alpha\}, \quad V = \{u \in W : \varphi(u) \leqslant \alpha\}.$$

Множества V_s, V непустые, поскольку $\forall s \;\; \theta_s \in V_s$ и ввиду слабой сходимости $\{\theta_s\}$ к θ и условия (1.26) $\theta \in V$. Используя условие (1.26), легко проверить, что для множеств V_s, V выполняется условие (1.19). Если же последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W \to W^*$, то выполняется и условие (1.20). Действительно, пусть $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W \to W^*$, и пусть последовательность $g_s \in W_s^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$. Тогда, полагая для любого s

$$w_s = \alpha(\alpha + |\varphi_s(A_s^{-1} g_s) - \varphi(A^{-1} g)|)^{-1} A_s^{-1} g_s,$$

получаем, что $\forall s \quad w_s \in V_s$ и, используя (1.26), $\lim_{s \to \infty} \| w_s - A_s^{-1} g_s \|_s = 0$. Значит, условие (1.20) выполняется.

П р и м е р 1.2. Пусть последовательность $h_s \in W_s^*$ сильно сходится к $h \in W^*$, причем $\forall s \quad \| h_s \|_{*,s} \neq 0$, $\| h \|_* \neq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Положим $\forall s$

$$V_s = \{u \in W_s : \langle h_s, u \rangle = \alpha\}, \quad V = \{u \in W : \langle h, u \rangle = \alpha\}.$$

Легко убедиться в том, что множества V_s, V непустые и для них выполняется условие (1.19). Если же последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W \to$ $\to W^*$, то выполняется и условие (1.20). Действительно, пусть $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W \to W^*$, и пусть последовательность $g_s \in W_s^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$. Тогда, взяв элемент $e \in W$ такой, что $\langle h,e\rangle > 0$, последовательность $e_s \in W_s$, слабо сходящуюся к e и такую, что $\forall s\ \langle h_s, e_s\rangle \geqslant \frac{1}{2}\langle h,e\rangle$, и полагая для любого s

$$w_s = A_s^{-1}g_s - (\langle h_s, A_s^{-1}g_s\rangle - \langle h, A^{-1}g\rangle)\langle h_s, e_s\rangle^{-1} e_s,$$

устанавливаем, что $\forall s\quad w_s \in V_s$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \| w_s - A_s^{-1}g_s\|_s = 0$. Значит, условие (1.20) выполняется.

1.5. О выборе из последовательности $\{A_s\}$ G-сходящейся подпоследовательности. Теореме о выборе из последовательности $\{A_s\}$ G-сходящейся подпоследовательности предпошлем доказательство одного вспомогательного результата.

Положим $\lambda_0 = (\mu\kappa)^{7mm'm_2}$, $\quad m_0 = m' m_1 (m' m_2 - m_1)^{-1}$.

Предложение 1.7. *Пусть $\{s_t\}$ – возрастающая последовательность из* $\mathbf{N}$, *B – оператор из W^* в W и выполняется условие*:

$$\text{если последовательность } f_s \in W_s^* \text{ сильно сходится к } f \in W^*, \text{ то последовательность } \{A_{s_t}^{-1} f_{s_t}\} \text{ слабо сходится в } Bf. \tag{1.27}$$

Тогда оператор B обратим и для любых $f, g \in W^*$ имеем

$$\| f-g\|_*^{m'} \leqslant \lambda_0 (1 + \| Bf\| + \| Bg\|)^{m-m_0} \| Bf - Bg\|^{m_0}, \tag{1.28}$$

$$\langle f-g, Bf-Bg\rangle \geqslant \lambda_0^{-1}(1 + \| Bf\| + \| Bg\|)^{m-m_2} \| Bf - Bg\|^{m_2}. \tag{1.29}$$

Доказательство. Пусть $f, g \in W^*$, и пусть последовательности $f_s, g_s \in W_s^*$ сильно сходятся соответственно к f, g. Применяя к f_s, g_s неравенство (1.17), а затем используя неравенство (1.9), условие (1.27) и предложение 1.3, устанавливаем, что

$$\| Bf - Bg\| \leqslant m'(\mu\kappa)^{m'+1}(1 + \| f\|_* + \| g\|_*)^{\frac{1}{m-1}} \| f-g\|_*^{\frac{1}{m_2-1}}. \tag{1.30}$$

Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $\quad u_s = A_s^{-1} f_s$, $\upsilon_s = A_s^{-1} g_s$. Из (1.12) и (1.13) вытекает, что для произвольного $s \in \mathbf{N}$

$$\| f_s - g_s\|_{*,s}^{m'm_2/m_1} \leqslant \lambda^{1+m_2/m_1}(1 + \| u_s\|_s + \| \upsilon_s\|_s)^{m(m_2-m_1)/m_1} \langle f_s - g_s, u_s - \upsilon_s\rangle.$$

Отсюда, используя неравенство (1.16), предложение 1.5 и условие (1.27), выводим, что

$$\| f-g\|_*^{m''} \leqslant (\mu\kappa)^{(m+3)m''}(1 + \| f\|_* + \| g\|_*)^{m''-m'} \langle f-g, Bf-Bg\rangle, \tag{1.31}$$

где $m'' = m' m_2 / m_1$. Кроме того, с помощью неравенств (1.14), (1.15), (1.8) и условия (1.27) устанавливаем, что

$$\| f\|_* \leqslant \mu^{2m-1} \| Bf\|^{m-1} + m(\mu^3 + \mu). \tag{1.32}$$

Используя это неравенство и аналогичное неравенство для g, из (1.31) выводим неравенство (1.28).

Далее, в силу (1.13) и (1.16) для произвольного $s \in \mathbf{N}$

$$\| u_s - \upsilon_s\|_s^{m_2} \leqslant \mu^{2m'm_2}(1 + \| f_s\|_{*,s} + \| g_s\|_{*,s})^{\frac{m_2-m}{m-1}} \langle f_s - g_s, u_s - \upsilon_s\rangle.$$

Отсюда, используя неравенство (1.9), условие (1.27) и предложение 1.3, получаем

$$\| Bf - Bg\|^{m_2} \leqslant (\mu\kappa)^{2m'm_2}(1 + \| f\|_* + \| g\|_*)^{\frac{m_2-m}{m-1}} \langle f-g, Bf-Bg\rangle.$$

Из этого неравенства, неравенства (1.32) и аналогичного неравенства для g выводим (1.29).

Остается заметить, что обратимость оператора B вытекает из неравенств (1.30) и (1.31), справедливых, как установлено, для произвольных $f, g \in W^*$ [35]. Предложение доказано.

Замечание 1.2. Из предложения 1.7 следует, что если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A\colon W \to W^*$, то для любых $u, \upsilon \in W$

$$\|Au - A\upsilon\|_*^{m'} \leqslant \lambda_0(1+\|u\|+\|\upsilon\|)^{m-m_0}\|u-\upsilon\|^{m_0}, \tag{1.33}$$

$$\langle Au - A\upsilon, u-\upsilon\rangle \geqslant \lambda_0^{-1}(1+\|u\|+\|\upsilon\|)^{m-m_2}\|u-\upsilon\|^{m_2}. \tag{1.34}$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Из последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, G-сходящуюся к обратимому оператору $A\colon W \to W^*$, удовлетворяющему при любых $u, \upsilon \in W$ неравенствам* (1.33) *и* (1.34).

Доказательство. Пусть $\{p_s\} \in \mathcal{P}$, $\kappa_0 = \sup\limits_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s}$, для любых $f \in W^*$ и $s \in \mathbf{N}$ $u_s^f = A_s^{-1}(f \circ p_s)$. В силу (1.16) и (1.17) для произвольных $f, g \in W^*$ и $s \in \mathbf{N}$

$$\|u_s^f\|_s^m \leqslant (\mu\kappa_0)^{m'}\|f\|_*^{m'} + m'\mu^{m'+1}, \tag{1.35}$$

$$\|u_s^f - u_s^g\|_s \leqslant m'(\mu\kappa_0)^{m'+1}(1+\|f\|_*+\|g\|_*)^{\frac{1}{m-1}}\|f-g\|_*^{\frac{1}{m_2-1}}. \tag{1.36}$$

Пусть H – счетное, всюду плотное множество в W^*. Используя неравенства (1.35) и предложение 1.1, устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ и оператор $B_0\colon H \to W$ такие, что

$$\forall f \in H \quad \{u_{s_t}^f\} \text{ слабо сходится к } B_0 f. \tag{1.37}$$

Из (1.36), (1.37) и предложения 1.3 вытекает, что для любых $f, g \in H$

$$\|B_0 f - B_0 g\| \leqslant \kappa M(f,g), \tag{1.38}$$

где $M(f, g)$ – правая часть неравенства (1.36). Тогда если $f \in W^*$, $\{f_i\} \subset H, f_i \to f$ сильно в W^*, то последовательность $\{B_0 f_i\}$ сильно сходится к некоторому элементу, причем этот элемент в силу (1.38) не зависит от самого выбора последовательности $\{f_i\} \subset H$, сильно сходящейся к f в W^*. Поэтому можно определить оператор B из W^* в W, полагая для $f \in W^*$ $Bf = \lim\limits_{i\to\infty} B_0 f_i$, где $\{f_i\} \subset H$, $f_i \to f$ сильно в W^*. Ясно, что B является продолжением оператора B_0. С помощью (1.36) и (1.37) устанавливаем, что $\forall f \in W^*$ $\{u_{s_t}^f\}$ слабо сходится к Bf. Отсюда, используя неравенство (1.13) и предложение 1.4, выводим, что выполняется условие (1.27). Тогда согласно предложению 1.7 оператор B обратим, и для любых $f, g \in W^*$ справедливы неравенства (1.28), (1.29). Положим $A = B^{-1}$. Тогда A – обратимый оператор из W в W^* и в силу условия (1.27) последовательность $\{A_{s_t}\}$ G-сходится к A. Кроме того, взяв произвольные $u, \upsilon \in W$ и подставив в (1.28), (1.29) $f = Au$, $g = A\upsilon$, получаем неравенства (1.33), (1.34). Теорема доказана.

Замечание 1.3. Аналогично изложенному в теореме 1.3 устанавливается, что из всякой подпоследовательности последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь G-сходящуюся подпоследовательность. Это свойства последовательности $\{A_s\}$ является аналогом свойства G-компактности последовательностей операторов с единой областью определения [4, 7–9].

§ 2. G-сходимость и усреднение эллиптических операторов, связанных с перфорированными областями

2.1. Предположения и обозначения. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbf{R}^n$, содержащихся в Ω. Предполагается, что существуют постоянная $\nu > 1$, конечные множества J_s ($s \in \mathbf{N}$), точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0 (s \in \mathbf{N}, j \in J_s)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbf{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B_s^j; \tag{2.1}$$

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0; \tag{2.2}$$

$$\forall s \in \mathbf{N}, \ \forall j \in J_s \quad 2(\nu - 1) r_s^j \leqslant \rho_s^j; \tag{2.3}$$

где B_s^j – замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j, ρ_s^j – расстояние от B_s^j до множества $\bigcup\limits_{J_s \ni l \neq j} B_s^l \cup \partial\Omega$.

Пусть $m > 1$, $W^{1,m}(\Omega)$ – банахово пространство, состоящее из всех функций $u \in L^m(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\partial_i u \in L^m(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$; $\|\cdot\|$ – стандартная основная норма в $W^{1,m}(\Omega)$, θ – нуль в $W^{1,m}(\Omega)$, $\|\cdot\|_0$ – вспомогательная норма в $W^{1,m}(\Omega)$, совпадающая с сужением на $W^{1,m}(\Omega)$ нормы в $L^m(\Omega)$, $\|\cdot\|_*$ – норма в $(W^{1,m}(\Omega))^*$. Для любого $s \in \mathbf{N}$ $W^{1,m}(\Omega_s)$ – банахово пространство, определяемое аналогично $W^{1,m}(\Omega)$, $\|\cdot\|_s$ – стандартная основная норма в $W^{1,m}(\Omega_s)$, θ_s – нуль в $W^{1,m}(\Omega_s)$, $\|\cdot\|_{0,s}$ – вспомогательная норма в $W^{1,m}(\Omega_s)$, совпадающая с сужением на $W^{1,m}(\Omega_s)$ нормы в $L^m(\Omega_s)$, $\|\cdot\|_{*,s}$ – норма в $(W^{1,m}(\Omega))^*$. Если $s \in \mathbf{N}$, то q_s – отображение $W^{1,m}(\Omega)$ в $W^{1,m}(\Omega_s)$ такое, что для любого $u \in W^{1,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$; $\mathcal{L}_s$ – множество всех линейных непрерывных отображений $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $W^{1,m}(\Omega)$; $\mathcal{P}$ – множество всех последовательностей $\{p_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in \mathbf{N}$ $p_s \in \mathcal{L}_s$; $\sup\limits_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} < \infty$; если $s \in \mathbf{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, то $q_s(p_s u) = u$.

2.2. Вспомогательные предложения.

Предложение 2.1. *Пусть $u \in W^{1,m}(\Omega)$, причем*

$$\varliminf_{s \to \infty} \|q_s u\|_{0,s} = 0. \tag{2.4}$$

Тогда $u = 0$ почти всюду на Ω.

Доказательство. Из условий (2.1)–(2.3) следует, что для любого куба $Q \subset \Omega$

$$\varliminf_{s \to \infty} \operatorname{mes}(Q \cap \Omega_s) \geqslant (1 - \nu^{-n}) \operatorname{mes} Q. \tag{2.5}$$

Отсюда вытекает, что для всякой неотрицательной функции $\varphi \in L^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\varliminf_{s \to \infty} \int_{\Omega_s} \varphi dx \geqslant (1 - \nu^{-n}) \int_{\Omega} \varphi dx.$$

Применяя это неравенство к $\varphi = |u|^m$ и используя (2.4), устанавливаем, что $u = 0$ почти всюду на Ω. Предложение доказано.

Введем обозначения: если $s \in \mathbf{N}$ и $j \in J_s$, то $B_{s,\nu}^j$ – открытый шар с центром в точке

x_s^j и радиусом νr_s^j, $E_s^j = B_{s,\nu}^j \setminus B_s^j$. Заметим, что в силу условия (2.3) шары $B_{s,\nu}^j$ содержатся в Ω и $B_{s,\nu}^j \cap B_{s,\nu}^l = \varnothing$ при $j \neq l$. Поэтому $\forall s \in \mathbf{N}$ $\bigcup_{j\in J_s} E_s^j \subset \Omega_s$.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Существуют последовательность* $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ *и постоянная* $C > 0$ *такие, что для любых* $s \in \mathbf{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $j \in J_s$

$$\|\nabla(p_s u)\|_{L^m(B_s^j)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^m(E_s^j)}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B_1 – замкнутый шар с центром в нуле и радиусом 1, B_ν – открытый шар с центром в нуле и радиусом ν, $E = B_\nu \backslash B_1$, для любой функции $u \in W^{1,m}(E)$ $\langle u \rangle$ – среднее значение u на E. В силу гладкости границы области E существует линейное непрерывное отображение p_0: $W^{1,m}(E) \to W^{1,m}(B_\nu)$ такое, что $\forall u \in W^{1,m}(E)$ $(p_0 u)|_E = u$. Норму отображения p_0 обозначим через ν_0. Пусть теперь p – отображение $W^{1,m}(E)$ в $W^{1,m}(B_\nu)$ такое, что $\forall u \in W^{1,m}(E)$ $pu = p_0(u - \langle u \rangle) + \langle u \rangle$. Легко убедиться в том, что отображение p линейное и непрерывное, причем $\forall u \in$ $\in W^{1,m}(E)$ $(pu)|_E = u$. А так как согласно [36, с. 74] существует $\nu_1 > 0$ такое, что для любой функции $u \in W^{1,m}(E)$ с нулевым средним значением на E

$$\|u\|_{W^{1,m}(E)} \leqslant \nu_1 \|\nabla u\|_{L^m(E)},$$

то для произвольных $u \in W^{1,m}(E)$ и $i \in \{1,\ldots, n\}$ имеем

$$\|\partial_i(pu)\|_{L^m(B_\nu)} \leqslant \nu_0 \|u - \langle u \rangle\|_{W^{1,m}(E)} \leqslant \nu_0\nu_1 \|\nabla u\|_{L^m(E)}. \tag{2.7}$$

Норму отображения p обозначим через ν_2. Определим отображения f_s^j, g_s^j следующим образом: если $s \in \mathbf{N}, j \in J_s$, то f_s^j – отображение $W^{1,m}(E_s^j)$ в $W^{1,m}(E)$ такое, что для любых $u \in W^{1,m}(E_s^j)$ и $x \in E$

$$(f_s^j u)(x) = u(x_s^j + r_s^j x);$$

g_s^j – отображение $W^{1,m}(B_\nu)$ в $W^{1,m}(B_{s,\nu}^j)$ такое, что для любых $u \in W^{1,m}(B_\nu)$ и $x \in B_{s,\nu}^j$

$$(g_s^j u)(x) = u((r_s^j)^{-1}(x - x_s^j)).$$

Положим для любых $s \in \mathbf{N}$ и $j \in J_s$ $p_s^j = g_s^j \circ p \circ f_s^j$. Нетрудно убедиться в том, что p_s^j – линейное непрерывное отображение $W^{1,m}(E_s^j)$ в $W^{1,m}(B_{s,\nu}^j)$ и $\forall u \in W^{1,m}(E_s^j)$ $(p_s^j u)\big|_{E_s^j} = u$. Кроме того, для $s \in \mathbf{N}$, $j \in J_s$, $u \in W^{1,m}(E_s^j)$ имеем

$$\|p_s^j u\|_{L^m(B_{s,\nu}^j)} \leqslant \nu_2(1 + r_s^j)\|u\|_{W^{1,m}(E_s^j)}, \tag{2.8}$$

и в силу (2.7)

$$\|\partial_i(p_s^j u)\|_{L^m(B_{s,\nu}^j)} \leqslant \nu_0\nu_1 \sum_{k=1}^{n} \|\partial_k u\|_{L^m(E_s^j)}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.9}$$

Пусть теперь для любого $s \in \mathbf{N}$ p_s – отображение $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $W^{1,m}(\Omega)$ такое, что для $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$ $(p_s u)(x) = u(x)$, если $x \in \Omega_s$ и $(p_s u)(x) = (p_s^j(u|_{E_s^j}))(x)$, если $x \in B_s^j$.

Используя неравенства (2.8), (2.9) и условие (2.2), устанавливаем, что $\{p_s\} \in \mathcal{P}$. Положим $C = n^2\nu_0\nu_1$. Используя (2.9), получаем, что для любых $s \in \mathbf{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $j \in J_s$ имеет место неравенство (2.6). Предложение доказано.

В силу предложения 2.2 $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Отсюда, а также из предложения 2.1 и очевидных неравенств $\|q_s u\|_s \leqslant \|u\|$, $\|q_s u\|_{0,s} \leqslant \|u\|_0$, справедливых для любых $u \in W^{1,m}(\Omega)$ и $s \in \mathbf{N}$, вытекает, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$, $W^{1,m}(\Omega)$ удовлетворяют всем условиям п. 1.1. Значит, для этих пространств можно реализовать все определения и результаты § 1. Имея это в виду, далее займемся изучением понятия G-сходимости дивергентных эллиптических операторов, определенных на рассматриваемых соболевских пространствах.

2.3. Последовательность эллиптических операторов A_s. Пусть $m' = m/(m-1)$, $0 < m_1 \leqslant \min(m, m')$, $m_2 \geqslant \max(m, 2)$, $c \geqslant 1$, и пусть для любых $s \in \mathbf{N}$ и $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a_i^s – каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, причем для любых $s \in \mathbf{N}$, $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbf{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbf{R}^n$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^s(x,0,0)| = 0, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^s(x,\xi,\eta) - a_i^s(x,\xi',\eta')|^{m'} \leqslant$$
$$\leqslant c(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_1}(|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_1}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^s(x,\xi,\eta) - a_i^s(x,\xi',\eta'))(\eta_i - \eta'_i) + (a_0^s(x,\xi,\eta) - a_0^s(x,\xi',\eta'))(\xi - \xi') \geqslant$$
$$\geqslant c^{-1}(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_2}(|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_2}. \tag{2.12}$$

Для дальнейшего заметим, что из этих соотношений следует, что для любых $s \in \mathbf{N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^s(x,\xi,\eta)|^{m'} \leqslant c(1+|\xi|+|\eta|)^m, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^s(x,\xi,\eta)\eta_i + a_0^s(x,\xi,\eta)\xi \geqslant 2^{m-m_2} c^{-1}[(|\xi|+|\eta|)^m - 1]. \tag{2.14}$$

Определим операторы A_s. Если $s \in \mathbf{N}$, то A_s – оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, \upsilon \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^s(x,u,\nabla u)\partial_i \upsilon + a_0^s(x,u,\nabla u)\upsilon \right\} dx.$$

В силу (2.10) $\forall s \in \mathbf{N}$ $\|A_s \theta_s\|_{*,s} = 0$, а в силу (2.11), (2.12) для любых $s \in \mathbf{N}$ и $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega_s)$ справедливы неравенства (1.12), (1.13) с постоянной $\lambda > 1$, зависящей только от n, m, m_2, c и mes Ω. Значит, операторы A_s обратимы и для них справедливы все результаты пп. 1.3–1.5 с соответствующей заменой в их формулировках W_s на $W^{1,m}(\Omega_s)$, W на $W^{1,m}(\Omega)$.

2.4. О связи G-сходимости операторов A_s со сходимостью решений краевых задач. Из определения 1.5, переформулированного для рассматриваемых соболевских пространств и операторов A_s, вытекает, что G-сходимость последовательности $\{A_s\}$ сопровождается слабой сходимостью решений задач Неймана для соответствующих эллиптических уравнений. Теорема 1.1 описывает предел последовательности решений задач Неймана для уравнений с операторами $A_s + T_s$, где T_s: $W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ – операторы, связанные с некоторым оператором T: $W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ условием (1.18). Приведем пример выполнения этого условия.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Пусть выполняется условие:*

существует ограниченная измеримая функция b *на* Ω

такая, что для любого куба $Q \subset \Omega$ $\lim\limits_{s\to\infty} \operatorname{mes}(Q \cap \Omega_s) = \int\limits_Q b dx.$ (2.15)

Пусть a – *каратеодориевская функция на* $\Omega\times\mathbf{R}$ *такая, что для любых* $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbf{R}$, $a(x,0) \in L^{m'}(\Omega)$ *имеем*

$$|a(x,\xi) - a(x,\xi')|^{m'} \leq \alpha(1+|\xi|+|\xi'|)^{m-\beta}|\xi - \xi'|^{\beta}, \tag{2.16}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \beta \leq m$. *Пусть для любого* $s \in \mathbf{N}$ T_s – *оператор из* $W^{1,m}(\Omega_s)$ *в* $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *такой, что*

$$\langle T_s u, \upsilon\rangle = \int\limits_{\Omega_s} a(x,u)\upsilon dx \quad (u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega_s));$$

T – *оператор из* $W^{1,m}(\Omega)$ *в* $(W^{1,m}(\Omega))^*$ *такой, что*

$$\langle Tu, \upsilon\rangle = \int\limits_{\Omega} ba(x,u)\upsilon dx \quad (u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega)).$$

Тогда если последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ *слабо сходится к* $u \in W^{1,m}(\Omega)$, *то последовательность* $\{T_s u_s\}$ *сильно сходится к* Tu.

Доказательство этого простого результата основывается на использовании (2.16) и того факта, что в силу (2.15) для любой функции $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s} \varphi dx = \int\limits_{\Omega} b\varphi dx.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Из предложения 2.3 вытекает, что если выполняется условие (2.15), $\psi \in L^{m'}(\Omega)$, $\forall s$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, причем

$$\langle f_s, u\rangle = \int\limits_{\Omega_s} \psi u dx (u \in W^{1,m}(\Omega_s)), \quad \langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} b\psi u dx \quad (u \in W^{1,m}(\Omega)),$$

то последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f.

Покажем, что G-сходимость операторов A_s сопровождается слабой сходимостью решений смешанных задач (условие Дирихле на $\partial\Omega$, условие Неймана на границах шаров B_s^j) для соответствующих уравнений.

Введем обозначения: если $s \in \mathbf{N}$, то $W_0^{1,m}(\Omega_s)$ – замыкание в $W^{1,m}(\Omega_s)$ множества всех функций класса $C^\infty(\overline{\Omega_s})$, носители которых содержатся в Ω; $\overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ – замыкание в $W^{1,m}(\Omega)$ класса функций $C_0^\infty(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* A – *обратимый оператор из* $W^{1,m}(\Omega)$ *в* $(W^{1,m}(\Omega))^*$ *и последовательность* $\{A_s\}$ G-*сходится к оператору* A. *Пусть последовательность* $\varphi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ *сильно сходится к* $\varphi \in W^{1,m}(\Omega)$, *а последовательность* $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходится к* $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. *Пусть* $\forall s \in \mathbf{N}$ $u_s \in \varphi_s + W_0^{1,m}(\Omega_s)$;

$$\forall s \in \mathbf{N}, \forall \upsilon \in W_0^{1,m}(\Omega_s) \quad \langle A_s u_s, \upsilon\rangle = \langle f_s, \upsilon\rangle. \tag{2.17}$$

Тогда существует функция $u \in \varphi + \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ *такая, что*

$$\forall \upsilon \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega) \quad \langle Au, \upsilon\rangle = \langle f, \upsilon\rangle \tag{2.18}$$

и последовательность $\{u_s\}$ *слабо сходится к* u.

Доказательству теоремы предпошлем следующие два предложения.

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Пусть последовательность* $\upsilon_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ *слабо сходится к* $\upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$, N_1 – *бесконечное подмножество* $\mathbf{N}$ *и* $\forall s \in N_1 \quad \upsilon_s \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$. *Тогда* $\upsilon \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$.

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Пусть* A – *обратимый оператор из* $W^{1,m}(\Omega)$ *в* $(W^{1,m}(\Omega))^*$ *и последовательность* $\{A_s\}$ G-*сходится к оператору* A. *Пусть* $\varphi \in W^{1,m}(\Omega)$, $V = \varphi + \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$, *последовательность* $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходится к* $g \in A(V)$. *Тогда существует последовательность* $\upsilon_s \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$ *такая, что*

$$\lim_{s\to\infty} \|\upsilon_s + q_s\varphi - A_s^{-1}g_s\|_s = 0. \tag{2.19}$$

Доказательство предложения 2.4 не представляет затруднений. Поэтому остановимся на доказательстве предложения 2.5.

Так как $g \in A(V)$, то найдется $w \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ такая, что $g = A(\varphi + w)$. Пусть $\{w^t\}$ – последовательность функции из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\forall t \in \mathbf{N} \quad \|w^t - w\| \leqslant t^{-1}. \tag{2.20}$$

Положим для любого $t \in \mathbf{N}$ $\quad g^t = A(\varphi + w^t)$. В силу (1.33) и (2.20) существует $\mu_1 > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbf{N}$

$$\|g^t - g\|_*^{m'} \leqslant \mu_1 t^{-m_0}. \tag{2.21}$$

Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ и положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $\quad u_s = A_s^{-1}(g \circ p_s) - q_s\varphi$, для любых $t, s \in \mathbf{N}$ $\quad u_s^t = A_s^{-1}(g^t \circ p_s) - q_s\varphi$. В силу (1.17) и (2.21) существует $\mu_2 > 0$ такое, что для любых $t, s \in \mathbf{N}$

$$\|u_s^t - u_s\|_s \leqslant \mu_2 t^{-\alpha}, \tag{2.22}$$

где $\alpha = m_0[m'(m_2 - 1)]^{-1}$.

Зафиксируем $t \in \mathbf{N}$ и положим для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\sigma_s = s^{-1} + \|u_s^t - q_s w^t\|_{0,s}.$$

В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к оператору A

$$\lim_{s\to\infty} \sigma_s = 0. \tag{2.23}$$

Положим теперь для произвольных $k \in \{1, 2, 3\}$ и $s \in \mathbf{N}$

$$E_s^k = \{x \in \Omega\colon\ d(x, \partial\Omega) \geqslant k\sqrt{\sigma_s}\}.$$

В силу (2.23)

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes}(\Omega \setminus E_s^3) = 0. \tag{2.24}$$

Покажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s \setminus E_s^2} |\nabla u_s^t|^m \, dx = 0 \tag{2.25}$$

Зафиксируем s' так, что $\forall s \geqslant s'$ $\ E_s^3 \neq \phi$ и $\operatorname{supp} w^t \subset E_s^3$, и пусть для $s < s'$ $\quad \psi_s = 0$

на Ω, для $s \geqslant s'$ ψ_s – функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что $0 \leqslant \psi_s \leqslant 1$ на Ω, $\psi_s = 0$ на E_s^3, $\psi_s = 1$ вне E_s^2, $|\nabla\psi_s| \leqslant c'/\sqrt{\sigma_s}$ на Ω (c' не зависит от s). Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $w_s = u_s^t \psi_s$, $\tilde{u}_s = u_s^t + q_s \varphi$. Заметим, что в силу ограниченности $\{u_s\}$ и (2.22), (2.23) последовательность $\{w_s\}$ слабо сходится к θ. Ясно, что $\forall s \in \mathbf{N}$

$$\langle A_s \tilde{u}_s, w_s \rangle = \langle g^t, p_s w_s \rangle.$$

Отсюда получаем, что для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\int\limits_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^s(x, \tilde{u}_s, \nabla\tilde{u}_s) \partial_i \tilde{u}_s + a_0^s(x, \tilde{u}_s, \nabla\tilde{u}_s)\tilde{u}_s \right\} \psi_s dx =$$

$$= \langle g^t, p_s w_s \rangle + \beta_s, \tag{2.26}$$

где $\beta_s \to 0$ в силу (2.13), ограниченности $\{u_s\}$ и (2.22)–(2.24). Из равенства (2.26), используя (2.14), (2.24) и слабую сходимость $\{w_s\}$ к θ, выводим равенство (2.25). Далее, пусть для $s < s_1$ $\varphi_s = 0$ на Ω, для $s \geqslant s'$ $\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $0 \leqslant \varphi_s \leqslant 1$ на Ω, $\varphi_s = 1$ на E_s^2, $\varphi_s = 0$ вне E_s^1, $|\nabla\varphi_s| \leqslant c'/\sqrt{\sigma_s}$ на Ω. Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $\upsilon_s^t = u_s^t \varphi_s$. Имеем $\forall s \in \mathbf{N}$ $\upsilon_s^t \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$ и в силу (2.23), (2.25)

$$\lim_{s \to \infty} \| \upsilon_s^t - u_s^t \|_s = 0. \tag{2.27}$$

Итак, для любого $t \in \mathbf{N}$ имеется последовательность $\upsilon_s^t \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющая равенству (2.27). Легко убедиться в том, что существует возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ такая, что

$$\forall t \in \mathbf{N}, \quad \forall s > s_t \quad \| \upsilon_s^t - u_s^t \|_s \leqslant t^{-1}. \tag{2.28}$$

Определим теперь последовательность $\upsilon_s \in W_0^{1,m}(\Omega_s)$ следующим образом: $\upsilon_s = \theta_s$, если $s \leqslant s_1$, $\upsilon_s = \upsilon_s^t$, если $s_t < s \leqslant s_{t+1}$. Используя (2.28), (2.22), (1.17), сильную сходимость $\{g_s\}$ к g и предложение 1.4, получаем равенство (2.19), и тем самым предложение доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 2.1. Положим для любого $s \in \mathbf{N}$

$$V_s = \varphi_s + W_0^{1,m}(\Omega_s), \quad V = \varphi + \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega).$$

Из условий теоремы и предложений 2.4, 2.5 вытекает, что

1) если последовательность $\upsilon_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $\upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$, N_1 – бесконечное подмножество $\mathbf{N}$ и $\forall s \in N_1$ $\upsilon_s \in V_s$, то $\upsilon \in V$;

2) если последовательность $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$, то существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что $\lim\limits_{s \to \infty} \| w_s - A_s^{-1} g_s \|_s = 0$.

Таким образом, для рассматриваемых множеств и операторов выполняются условия (1.19), (1.20). Кроме того, в силу (2.17) для любых $s \in \mathbf{N}$ и $\upsilon \in V_s$

$$\langle A_s u_s - f_s, \ \upsilon - u_s \rangle = 0.$$

Теперь из теоремы 1.2 выводим: существует функция $u \in V$ такая, что $\forall w \in V$

$$\langle Au - f, \ w - u \rangle \geqslant 0 \tag{2.29}$$

и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u. Взяв произвольную функцию

$\upsilon \in \overset{0}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ и подставив в (2.29) $w = u \pm \upsilon$, получим $\langle Au, \upsilon\rangle = \langle f, \upsilon\rangle$. Тем самым (2.18) установлено и теорема доказана.

2.5. О связи G-сходимости операторов A_s со сходимостью решений вариационных неравенств. Покажем, что G-сходимость операторов A_s сопровождается слабой сходимостью решений соответствующих вариационных неравенств с препятствиями.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть A – обратимый оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть последовательность $\varphi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно сходится к $\varphi \in W^{1,m}(\Omega)$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $V_s = \{u \in W^{1,m}(\Omega_s)$: $u \geqslant \varphi_s$ почти всюду на $\Omega_s\}$, $V = \{u \in W^{1,m}(\Omega)$: $u \geqslant \varphi$* почти всюду на *$\Omega\}$. Пусть последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbf{N}$ $u_s \in V_s$; $\forall s \in \mathbf{N}$, $\forall \upsilon \in V_s$, $\langle A_s u_s - f_s, \upsilon - u_s\rangle \geqslant 0$. Тогда существует функция $u \in V$ такая, что $\forall \upsilon \in V$ $\langle Au - f, \upsilon - u\rangle \geqslant 0$; последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u; последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 для доказательства теоремы 2.2 достаточно проверить выполнение условий (1.19), (1.20) для рассматриваемых множеств и операторов. Проверим выполнение условия (1.19). Пусть последовательность $\upsilon_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $\upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$, N_1 – бесконечное подмножество $\mathbf{N}$ и $\forall s \in N_1$ $\upsilon_s \in V_s$. Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ и положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $w_s = \max\{p_s\upsilon_s, \varphi\}$. Ясно, что существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset N_1$ и $w \in V$ такие, что $w_{s_t} \to w$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$. Для $s \in N_1$ почти всюду на Ω_s имеем $|q_s w_s - \upsilon_s| \leqslant |\varphi_s - q_s\varphi|$. Отсюда и из сильной сходимости $\{\varphi_s\}$ к φ вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \| q_{s_t} w_{s_t} - \upsilon_{s_t} \|_{0,s_t} = 0.$$

Используя это равенство, слабую сходимость $\{\upsilon_s\}$ к υ, $\{w_{s_t}\}$ к w, получаем, что

$$\underline{\lim}_{s\to\infty} \| q_s(\upsilon - w)\|_{0,s} = 0.$$

Отсюда и из предложения 2.1 выводим, что $\upsilon = w$ почти всюду на Ω и, следовательно, $\upsilon \in V$. Значит, условие (1.19) выполняется.

Проверим теперь выполнение условия (1.20). Пусть последовательность $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$. Положим $\upsilon = A^{-1}g$, и пусть для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\upsilon_s = A_s^{-1} g_s,$$

$$\delta_s = (\|\upsilon_s - q_s\upsilon\|_{0,s} + \|\varphi_s - q_s\varphi\|_{0,s})^{1/2},$$

$$E_s = \{x \in \Omega_s\colon\ \upsilon_s(x) + \delta_s < \varphi_s(x)\}.$$

В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{\upsilon_s\}$ слабо сходится к υ. Отсюда и из сильной сходимости $\{\varphi_s\}$ к φ вытекает, что

$$\lim_{s\to\infty} \delta_s = 0. \tag{2.30}$$

А так как в силу включения $\upsilon \in V$ для любого $s \in \mathbf{N}$ $\operatorname{mes} E_s \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{(m-1)/m}\delta_s$, то и

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} E_s = 0. \tag{2.31}$$

Покажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{E_s} |\nabla \upsilon_s|^m \, dx = 0. \tag{2.32}$$

Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $\tilde{\upsilon}_s = \min\{\upsilon_s - \varphi_s, -\delta_s\}$. Зафиксировав произвольное $s \in \mathbf{N}$, имеем $\langle A_s \upsilon_s, \tilde{\upsilon}_s \rangle = \langle g_s, \tilde{\upsilon}_s \rangle$. Из этого равенства получаем

$$\int_{E_s} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i^s(x, \upsilon_s, \nabla \upsilon_s) \partial_i \upsilon_s \right\} dx = \int_{E_s} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i^s(x, \upsilon_s, \nabla \upsilon_s) \partial_i \varphi_s \right\} dx +$$

$$+\delta_s \int_{\Omega_s \setminus E_s} a_0^s(x, \upsilon_s, \nabla \upsilon_s) dx + \langle g_s, \tilde{\upsilon}_s \rangle.$$

Отсюда, используя (2.13), (2.14), (2.30), (2.31), ограниченность $\{\upsilon_s\}$, сильную сходимость $\{\varphi_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к φ, g и слабую сходимость $\{\tilde{\upsilon}_s\}$ к θ, выводим (2.32). Положим теперь для любого $s \in \mathbf{N}$ $w_s = \max(\upsilon_s + \delta_s, \varphi_s\}$. Имеем $\forall s \in \mathbf{N}$ $w_s \in V_s$ и ввиду (2.30)–(2.32) и сильной сходимости $\{\varphi_s\}$ к φ $\lim\limits_{s\to\infty} \| w_s - \upsilon_s \|_s = 0$. Значит, условие (1.20) выполняется. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.2. Теорема 2.2 останется верной, если в определении множеств V_s, V знаки неравенств заменить на противоположные. Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Отметим, что при условии G-сходимости линейных эллиптических операторов с единой областью определения сходимость решений соответствующих вариационных неравенств с односторонними препятствиями изучалась в [37–39].

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть A – обратимый оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть последовательности φ_s, $\psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно сходятся соответственно к φ, $\psi \in W^{1,m}(\Omega)$, $\alpha > 0$ и выполняется условие*

$$\forall s \in \mathbf{N} \quad \varphi_s + \alpha \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s. \tag{2.33}$$

Пусть для любого $s \in \mathbf{N}$

$$V_s = \{u \in W^{1,m}(\Omega_s)\colon\ \varphi_s \leqslant u \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s\},$$

$$V = \{u \in W^{1,m}(\Omega_s)\colon\ \varphi \leqslant u \leqslant \psi \text{ почти всюду на } \Omega\}.$$

Пусть последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbf{N}$ $u_s \in V_s$; $\forall s \in \mathbf{N}$, $\forall \upsilon \in V_s$ $\langle A_s u_s - f_s,\ \upsilon - u_s \rangle \geqslant 0$. Тогда существует функция $u \in V$ такая, что $\forall \upsilon \in V$ $\langle Au - f, \upsilon - u \rangle \geqslant 0$; последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u; последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что в силу (2.33) множества V_s непустые. Кроме того, из сильной сходимости $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ и (2.33) вытекает, что $\varphi \leqslant \psi$ почти всюду на Ω и, следовательно, $V \neq \varnothing$. Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий (1.19), (1.20) для рассматриваемых множеств и операторов. Проверка выполнения условия (1.19) проводится аналогично изложенному в доказательстве теоремы 2.2. Поэтому остановимся лишь на проверке выполнения условия (1.20).

Пусть последовательность $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$. Положим $\upsilon = A^{-1}g$, и пусть для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\upsilon_s = A_s^{-1}g_s,\quad \tau_s = (\|\upsilon_s - q_s\upsilon\|_{0,s} + \|\varphi_s - q_s\varphi\|_{0,s} + \|\psi_s - q_s\psi\|_{0,s})^{1/2},$$

$$E_s^- = \{x \in \Omega_s:\ \upsilon_s(x) < \varphi_s(x) - \tau_s\},$$

$$E_s^+ = \{x \in \Omega_s:\ \upsilon_s(x) > \psi_s(x) + \tau_s\}.$$

В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{\upsilon_s\}$ слабо сходится к υ. Отсюда и из сильной сходимости $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ вытекает, что

$$\lim_{s\to\infty} \tau_s = 0. \tag{2.34}$$

А так как в силу включения $\upsilon \in V$ для любого $s \in \mathrm{N}$ $\operatorname{mes} E_s^{\pm} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{(m-1)/m}\tau_s$, то и

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} E_s^{\pm} = 0. \tag{2.35}$$

Положим для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\upsilon_s^- = \min\{\upsilon_s - \varphi_s, -\tau_s\},\quad \upsilon_s^+ = \max\{\upsilon_s - \psi_s, \tau_s\}.$$

Из очевидных равенств $\langle A_s\upsilon_s, \upsilon_s^{\pm}\rangle = \langle g_s, \upsilon_s^{\pm}\rangle$, используя (2.13), (2.14), (2.34), (2.35), ограниченность $\{\upsilon_s\}$, сильную сходимость $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к φ, ψ, g и слабую сходимость $\{\upsilon_s^{\pm}\}$ к θ, выводим, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{E_s^{\pm}} |\nabla\upsilon_s|^m\, dx = 0. \tag{2.36}$$

Положим теперь для любого $s \in \mathbf{N}$

$$\chi_s = \max\{\upsilon_s, \varphi_s - \tau_s\},\quad \tilde{\upsilon}_s = \min\{\chi_s, \psi_s + \tau_s\}.$$

Используя сильную сходимость $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ и (2.34)–(2.36), устанавливаем, что

$$\lim_{s\to\infty} \|\tilde{\upsilon}_s - \upsilon_s\|_s = 0. \tag{2.37}$$

В силу (2.34) найдется $s_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall s > s_0$ $\tau_s < \alpha/2$. Положим для $s \leqslant s_0$ $w_s = \varphi_s$, а для $s > s_0$

$$w_s = \left(1 - \frac{2\tau_s}{\alpha}\right)\tilde{\upsilon}_s + \frac{2\tau_s}{\alpha}(\varphi_s - \tau_s) + \tau_s.$$

Используя условие (2.33), получаем, что для любого $s \in \mathbf{N}$ $w_s \in V_s$, а используя ограниченность последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\tilde{\upsilon}_s\}$, (2.34) и (2.37), находим, что $\lim\limits_{s\to\infty} \|w_s - \upsilon_s\|_s = 0$. Значит, условие (1.20) выполняется. Теорема доказана.

Другие результаты о сходимости решений вариационных неравенств с операторами A_s можно получить, используя теорему 1.2 и примеры 1.1, 1.2. В связи с этим приведем пример выполнения условия (1.26).

Пример 2.1. Пусть выполняется условие (2.15), для любого $s \in \mathbf{N}$ φ_s – функционал на $W^{1,m}(\Omega_s)$, $\varphi_s(u) = \|u\|_{0,s}^m$ $(u \in W^{1,m}(\Omega_s))$, φ – функционал на $W^{1,m}(\Omega)$, $\varphi(u) = \int_\Omega b|u|^m\, dx$ $(u \in W^{1,m}(\Omega))$. Тогда если последовательность $\upsilon_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $\upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_s(\upsilon_s) = \varphi(\upsilon)$.

2.6. Определение сильной G-сходимости операторов A_s. Введем операторы $\Gamma_{i,s}$. Если $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $s \in \mathbf{N}$, то $\Gamma_{i,s}$ – оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $L^{m'}(\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$(\Gamma_{i,s}u)(x) = a_i^s(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{при } x \in \Omega_s,$$
$$(\Gamma_{i,s}u)(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_s.$$

Далее понадобятся еще такие обозначения: $\mathcal{M}$ – множество всех каратеодориевых функций a на $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ таких, что для любых $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ $a(\cdot, \varphi(\cdot), \psi(\cdot)) \in L^{m'}(\Omega)$; $\mathcal{M}^{m+1}$ – совокупность всех отображений множества $\{0, 1, \dots, n\}$ в $\mathcal{M}$; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, $i \in (0, 1, \dots, n\}$, то $a_i = a(i)$; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, то A – оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$ имеем

$$\langle Au, \upsilon \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u)\partial_i \upsilon + a_0(x, u, \nabla u)\upsilon \right\} dx.$$

Определение 2.1. Пусть $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, причем оператор A обратим. Будем говорить, что *последовательность* $\{A_s\}$ *сильно G-сходится к оператору A*, если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A, и из того, что $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbf{N}$, $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к Au, следует, что для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\Gamma_{i,s}(A_s^{-1} f_s) \to a_i(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ слабо в $L^{m'}(\Omega)$.

Данное определение является аналогом определения сильной G-сходимости эллиптических операторов с единой областью задания [4, 9].

В следующем пункте устанавливается ряд вспомогательных результатов, которые затем используются при доказательстве теоремы о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности.

2.7. Операторы $A_s^{\varphi,\psi}$, $\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi}$ и некоторые оценки для функций, связанных с операторами $A_s^{\varphi,\psi}$. Если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$, то $A_s^{\varphi,\psi}$ оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega_s)$ имеем

$$\langle A_s^{\varphi,\psi} u, \upsilon \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^s(x, \varphi + u, \psi + \nabla u)\partial_i \upsilon + a_0^s(x, \varphi + u, \psi + \nabla u)\upsilon \right\} dx;$$

если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $s \in \mathbf{N}$, то $\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi}$ – оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $L^{m'}(\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$(\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi} u)(x) = a_i^s(x, \varphi(x) + u(x), \ \psi(x) + \nabla u(x))$$

при $x \in \Omega_s$,

$$(\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi} u)(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_s.$$

Введем еще такие обозначения: если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, Q – открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $Q \subset \Omega$, то

$$\|\varphi\|_Q = \left(\int_Q |\varphi|^m \, dx \right)^{1/m}, \quad \|\psi\|_Q = \left(\int_Q |\psi|^m \, dx \right)^{1/m},$$

$$\lambda_{\varphi,\psi}(Q) = (\operatorname{mes} Q)^{1/m} + \|\varphi\|_Q + \|\psi\|_Q, \quad \lambda_{\varphi,\psi} = \max\{1, \lambda_{\varphi,\psi}(\Omega)\}.$$

Далее, через c_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, m, m_1, m_2, c, ν и $\operatorname{mes}\Omega$.

В силу (2.13) для $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$

$$\|A_s^{\varphi,\psi}\theta_s\|_{*,s} \leqslant c\lambda_{\varphi,\psi}^{m-1}, \tag{2.38}$$

а в силу (2.11) и (2.12) для $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$, u, $\upsilon \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\|A_s^{\varphi,\psi}u - A_s^{\varphi,\psi}\upsilon\|_{*,s}^{m'} \leqslant c_1\lambda_{\varphi,\psi}^{m-m_1}(1+\|u\|_s+\|\upsilon\|_s)^{m-m_1}\|u-\upsilon\|_s^{m_1}, \tag{2.39}$$

$$\langle A_s^{\varphi,\psi}u - A_s^{\varphi,\psi}\upsilon, u-\upsilon\rangle \geqslant c_2\lambda_{\varphi,\psi}^{m-m_2}(1+\|u\|_s+\|\upsilon\|_s)^{m-m_2}\|u-\upsilon\|_s^{m_2}. \tag{2.40}$$

Из неравенств (2.39), (2.40) вытекает, что операторы $A_s^{\varphi,\psi}$ обратимы.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$, $f, g \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $u = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f$, $\upsilon = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1}g$. *Тогда*

$$\|u\|_s^m \leqslant c_3\lambda_{\varphi,\psi}^{m_2m'}(\|f\|_{*,s}+1)^{m'}, \tag{2.41}$$

$$\|u-\upsilon\|_s \leqslant c_4\lambda_{\varphi,\psi}^{m_2m'+1}(1+\|f\|_{*,s}+\|g\|_{*,s})^{\frac{1}{m-1}}\|f-g\|_{*,s}^{\frac{1}{m_2-1}}, \tag{2.42}$$

$\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$\|\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi}u\|_{L^{m'}(\Omega)} \leqslant c_5\lambda_{\varphi,\psi}^{m_2}(\|f\|_{*,s}+1). \tag{2.43}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку (2.41) устанавливаем, используя неравенства (2.40) и (2.38). Из (2.40), (2.41) и аналогичного неравенства для υ выводим неравенство (2.42). Наконец, используя (2.13) и (2.41), получаем (2.43). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $\varphi, \tilde{\varphi} \in L^m(\Omega)$, $\psi, \tilde{\psi} \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$, $f \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $u = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f$, $\tilde{u} = (A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{-1}f$. *Тогда*

$$\left\|A_s^{\varphi,\psi}u - A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}u\right\|_{*,s}^{m'} \leqslant c_6(\lambda_{\varphi,\psi}+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{m_2m'}(\|f\|_{*,s}+1)^{m'}(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\Omega+\|\psi-\tilde{\psi}\|_\Omega)^{m_1}, \tag{2.44}$$

$$\|u-\tilde{u}\|_s \leqslant c_7(\lambda_{\varphi,\psi}+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{m_2m'}(\|f\|_{*,s}+1)^{\frac{1}{m-1}}(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\Omega+\|\psi-\tilde{\psi}\|_\Omega)^{\tilde{m}}, \tag{2.45}$$

где $\tilde{m} = \dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{m_1}{m_2-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку (2.44) устанавливаем, используя неравенства (2.11) и (2.41). Из очевидного неравенства

$$\langle A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}u - A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}\tilde{u}, u-\tilde{u}\rangle \leqslant \|A_s^{\varphi,\psi}u - A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}u\|_{*,s}\|u-\tilde{u}\|_s$$

и неравенств (2.40), (2.41), (2.44) выводим оценку (2.45). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *Пусть* $\varphi, \tilde{\varphi} \in L^m(\Omega)$, $\psi, \tilde{\psi} \in (L^m(\Omega))^n$, $s \in \mathbf{N}$, $f, g \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $u = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f$, $\upsilon = (A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{-1}g$. *Тогда*

$$\|u-\upsilon)\|_s \leqslant c_8(\lambda_{\varphi,\psi}+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{m_2m'+1}(1+\|f\|_{*,s}+\|g\|_{*,s})^{\frac{1}{m-1}} \times$$

$$\times\left[\|f-g\|_{*,s}^{\frac{1}{m_2-1}}+(\|\varphi-\tilde\varphi\|_\Omega+\|\psi-\tilde\psi\|_\Omega)^{\tilde m}\right], \tag{2.46}$$

$\forall i\in\{0,1,\dots,n\}$

$$\left\|\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi}u-\Gamma_{i,s}^{\tilde\varphi,\tilde\psi}\upsilon\right\|_{L^{m'}(\Omega)}\leqslant c_9(\lambda_{\varphi,\psi}+\lambda_{\tilde\varphi,\tilde\psi})^{mm_2+2}\times$$

$$\times(1+\|f\|_{*,s}+\|g\|_{*,s})\left[\|f-g\|_{*,s}^{\frac{1}{m_2-1}}+(\|\varphi-\tilde\varphi\|_\Omega+\|\psi-\tilde\psi\|_\Omega)^{\tilde m}\right]^{\frac{m_1}{m'}}. \tag{2.47}$$

Доказательство. Положим $\tilde u=(A_s^{\tilde\varphi,\tilde\psi})^{-1}f$. Тогда

$\|u-\upsilon\|_s\leqslant\|u-\tilde u\|_s+\|\tilde u-\upsilon\|_s$.

Отсюда и из (2.45), (2.42) выводим оценку (2.46). Теперь, используя (2.11), (2.41) и (2.46), получаем (2.47). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Пусть* $\varphi\in L^m(\Omega)$, $\psi\in(L^m(\Omega))^n$, *последовательность* $f_s\in\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходится к* $f\in(W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s\in\mathbf{N}$ $u_s=(A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f_s$. *Пусть* $\{s_t\}$ *– возрастающая последовательность из* $\mathbf{N}$ *и* $\{u_{s_t}\}$ *слабо сходится к* θ. *Пусть* Q *– открытое множество в* $\mathbf{R}^n$, $\overline{Q}\subset\Omega$, $w\in C^\infty(\Omega)$, *причем* $0\leqslant w\leqslant 1$ *в* Ω *и* $w=0$ *на* $\Omega\backslash Q$. *Тогда имеем неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{\Omega_{s_t}}|\nabla u_{s_t}|^m w\,dx\leqslant c_{10}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)]^m. \tag{2.48}$$

Доказательство. Положим для любого $s\in\mathbf{N}$

$$I_s'=\int_{\Omega_s}\left\{\sum_{i=1}^n a_i^s(x,u_s,\nabla u_s)\partial_i u_s+a_0^s(x,u_s,\nabla u_s)u_s\right\}w\,dx,$$

$$I_s''=\int_{\Omega_s}\left\{\sum_{i=1}^n(a_i^s(x,\varphi+u_s,\psi+\nabla u_s)-a_i^s(x,u_s,\nabla u_s))\partial_i u_s\right\}w\,dx,$$

$$\alpha_s=\langle A_s^{\varphi,\psi}u_s,u_s w\rangle-I_s'-I_s''. \tag{2.49}$$

Используя (2.13) и слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$ к θ, устанавливаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\alpha_{s_t}=0. \tag{2.50}$$

Теперь из (2.49), учитывая (2.50), равенство $A_s^{\varphi,\psi}u_s=f_s$, сильную сходимость $\{f_s\}$ к f и слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$ к θ, выводим, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ I_{s_t}'\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |I_{s_t}''|. \tag{2.51}$$

Пусть F – левая часть неравенства (2.48). В силу (2.14)

$$F\leqslant\operatorname{mes}Q+2^{m_2-m}c\overline{\lim_{t\to\infty}}I_{s_t}', \tag{2.52}$$

а в силу (2.11) и слабой сходимости $\{u_{s_t}\}$ к θ

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|I''_{s_t}|\leqslant c'[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)]^{m-1}F^{\frac{1}{m}}+c'[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)]^{\frac{m_1}{m'}}F^{1-\frac{m_1}{mm'}}, \tag{2.53}$$

где $c'>0$ и зависит только от n, m, c. Из (2.51)–(2.53) получаем неравенство (2.48). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. *Пусть* $\varphi,\tilde{\varphi}\in L^m(\Omega)$, $\psi,\tilde{\psi}\in(L^m(\Omega))^n$, *последовательности* $f_s,g_s\in$ $\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходятся соответственно к* $f,g\in(W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s\in\mathbf{N}$ $u_s=(A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f_s, \upsilon_s=(A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{-1}g_s$. *Пусть* $\{s_t\}$ – *возрастающая последовательность из* $\mathbf{N}$ *и* $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ *слабо сходятся к* θ. *Пусть* Q – *открытое множество в* $\mathbf{R}^n$, $\overline{Q}\subset\Omega$, $w\in C^\infty(\Omega)$, *причем* $0\leqslant w\leqslant 1$ *в* Ω *и* $w=0$ *на* $\Omega\backslash Q$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{\Omega_{s_t}}|\nabla u_{s_t}-\nabla\upsilon_{s_t}|^m w\,dx\leqslant c_{11}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)+$$

$$+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}(Q)]^{m(1-\tilde{m})}[\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_Q+\|\psi-\tilde{\psi}\|_Q]^{m\tilde{m}}. \tag{2.54}$$

Доказательство. Положим для любого $s\in\mathbf{N}$

$$I_s=\int_{\Omega_s}\left\{\sum_{i=1}^n(a_i^s(x,\varphi+u_s,\psi+\nabla u_s)-a_i^s(x,\varphi+\upsilon_s,\psi+\nabla\upsilon_s))\partial_i(u_s-\upsilon_s)+\right.$$

$$\left.+(a_0^s(x,\varphi+u_s,\psi+\nabla u_s)-a_0^s(x,\varphi+\upsilon_s,\psi+\nabla\upsilon_s))(u_s-\upsilon_s)\right\}w\,dx,$$

$$I'_s=\int_{\Omega_s}\left\{\sum_{i=1}^n(a_i^s(x,\varphi+\upsilon_s,\psi+\nabla\upsilon_s)-a_i^s(x,\tilde{\varphi}+\upsilon_s,\tilde{\psi}+\nabla\upsilon_s))\partial_i(u_s-\upsilon_s)\right\}w\,dx,$$

$$\alpha_s=\langle A_s^{\varphi,\psi}u_s-A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}\upsilon_s,(u_s-\upsilon_s)w\rangle-I_s-I'_s. \tag{2.55}$$

Используя (2.13) и слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ к θ, устанавливаем, что $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha_{s_t}=0$.

Используя это равенство, а также равенства $A_s^{\varphi,\psi}u_s=f_s$, $A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}\upsilon_s=g_s$, сильную сходимость $\{f_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к f, g и слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ к θ, из (2.55) выводим, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}I_{s_t}\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}|I'_{s_t}|. \tag{2.56}$$

Пусть F – левая часть неравенства (2.54). В силу (2.11), (2.12), слабой сходимости $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ к θ и леммы 2.4 получаем

$$F\leqslant 4^m cc_{10}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}(Q)]^{(m_2-m)\frac{m}{m_2}}\left[\overline{\lim_{t\to\infty}}I_{s_t}\right]^{\frac{m}{m_2}}, \tag{2.57}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|I'_{s_t}|\leqslant 4^m ncc_{10}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)+\lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}(Q)]^{\frac{m-m_1}{m'}}[\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_Q+\|\psi-\tilde{\psi}\|_Q]^{\frac{m_1}{m'}}F^{\frac{1}{m}}. \tag{2.58}$$

Из (2.56)–(2.58) получаем неравенство (2.54). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. *Пусть* $\varphi\in L^m(\Omega)$, $\psi\in(L^m(\Omega))^n$, *последовательность* $f_s\in$ $\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходится к* $f\in(W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s\in\mathbf{N}$ $u_s=(A_s^{\varphi,\psi})^{-1}f_s$. *Пусть* $\{s_t\}$ –

возрастающая последовательность из $\mathbf{N}$ *и* $\{u_{s_t}\}$ *слабо сходится к* θ. *Пусть еще* $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $F \in L^{m'}(\Omega)$ *и*

$$\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi} u_{s_t} \to F \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.59}$$

Пусть, наконец, Q – *открытое множество в* $\mathbf{R}^n$, $Q \subset \Omega$, $w \in L^m(\Omega)$. *Тогда*

$$\left|\int_Q Fwdx\right| \leqslant c_{12}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)]^{m-1} \|w\|_Q. \tag{2.60}$$

Доказательство. Положим для любого $\varepsilon > 0$ $Q(\varepsilon) = \{x \in Q: d(x, \partial Q) \geqslant \varepsilon\}$. Ясно, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ $Q(\varepsilon_0) \neq \phi$. Пусть ε – произвольное число из промежутка $(0, \varepsilon_0]$. Для любого $s \in \mathbf{N}$ через α_s обозначим интеграл от функции $(\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi} u_s)w$ по множеству $Q(\varepsilon)$. В силу условия (2.59)

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_{s_t} = \int_{Q(\varepsilon)} Fwdx. \tag{2.61}$$

Пусть υ – функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \upsilon \leqslant 1$ на Ω, $\upsilon = 1$ на $Q(\varepsilon)$, $\upsilon = 0$ на $\Omega\backslash \mathrm{int}\, Q(\varepsilon/2)$. Используя (2.13), для $s \in \mathbf{N}$ получаем

$$|\alpha_s| \leqslant c\left[\lambda_{\varphi,\psi}(Q) + \|u_s\|_{0,s} + \left(\int_{\Omega_s} |\nabla u_s|^m \upsilon dx\right)^{1/m}\right]^{m-1} \|w\|_Q.$$

Используя это неравенство, слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$ к θ, лемму 2.4 и равенство (2.61), устанавливаем, что

$$\left|\int_{Q(\varepsilon)} Fwdx\right| \leqslant c_{12}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q)]^{m-1} \|w\|_Q.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (2.60). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. *Пусть* $\varphi, \tilde{\varphi} \in L^m(\Omega)$, $\psi, \tilde{\psi} \in (L^m(\Omega))^n$, *последовательности* $f_s, g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходятся соответственно к* $f, g \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $\forall s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$, $\upsilon_s = (A_s^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}})^{-1} g_s$. *Пусть* $\{s_t\}$ – *возрастающая последовательность из* $\mathbf{N}$ *и* $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ *слабо сходятся к* θ. *Пусть еще* $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $F, \tilde{F} \in L^{m'}(\Omega)$ *и*

$$\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi} u_{s_t} \to F, \quad \Gamma_{i,s_t}^{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}} \upsilon_{s_t} \to \tilde{F} \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.62}$$

Пусть, наконец, Q – *открытое множество в* $\mathbf{R}^n$, $Q \subset \Omega$, $w \in L^m(\Omega)$. *Тогда*

$$\left|\int_Q (F - \tilde{F})wdx\right| \leqslant c_{13}[\lambda_{\varphi,\psi}(Q) + \lambda_{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}}(Q)]^{m-m''-1}[\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_Q + \|\psi - \tilde{\psi}\|_Q]^{m''} \|w\|_Q, \tag{2.63}$$

где $m'' = m_1\tilde{m}/m'$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы с использованием условия (2.62), неравенства (2.11), лемм 2.4 и 2.5.

Введем обозначения: если $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, $i \in \{0,1, \ldots, n\}$, $s \in \mathbf{N}$, то $A_s^{\xi,\eta} = A_s^{\varphi,\psi}$, $\Gamma_{i,s}^{\xi,\eta} = \Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi}$, где $\varphi \in L^m(\Omega)$ и $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ таковы, что $\forall x \in \Omega$, $\varphi(x) = \xi$,

$\psi(x) = \eta$; если $y \in \mathbf{R}^n$, $l \in \mathbf{N}$, то

$$Q_l(y) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : |x_i - y_i| < \frac{1}{2l}, \quad i = 1, \ldots, n \right\}.$$

ЛЕММА 2.8. *Пусть* $\xi, \xi' \in \mathbf{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbf{R}^n$, *последовательности* $f_s, g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходятся соответственно к* $f, g \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s \in \mathbf{N}$

$$u_s = (A_s^{\xi,\eta})^{-1} f_s, \quad \upsilon_s = (A_s^{\xi',\eta'})^{-1} g_s.$$

Пусть $\{s_t\}$ *– возрастающая последовательность из* $\mathbf{N}$ *и* $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ *слабо сходятся к* θ. *Пусть для любого* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $F_i, F_i' \in L^{m'}(\Omega)$ *и*

$$\Gamma_{i,s_t}^{\xi,\eta} u_{s_t} \to F_i, \quad \Gamma_{i,s_t}^{\xi',\eta'} \upsilon_{s_t} \to F_i' \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.64}$$

Тогда почти всюду на Ω

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - F_i')(\eta_i - \eta_i') + (F_0 - F_0')(\xi - \xi') \geqslant$$

$$\geqslant c_{14}(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m - m_2} (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}. \tag{2.65}$$

Доказательство. Пусть $y \in \Omega$, u, υ – функции на Ω такие, что $\forall x \in \Omega$ $u(x) = \xi + (x - y, \eta)$, $\upsilon(x) = \xi' + (x - y, \eta')$. Возьмем $l_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $Q_{l_0}(y) \subset \Omega$, и зафиксируем произвольное $l \in \mathbf{N}$, $l > l_0 + 2$. Пусть w – функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant w \leqslant 1$ на Ω, $w = 1$ на $Q_l(y)$, $w = 0$ на $\Omega \backslash Q_{l-1}(y)$. Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $w_s = u_s - \upsilon_s + q_s(u - \upsilon)$,

$$I_s = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i^s(x, \xi + u_s, \eta + \nabla u_s) - a_i^s(x, \xi' + \upsilon_s, \eta' + \nabla \upsilon_s)) \partial_i w_s + \right.$$

$$\left. + (a_0^s(x, \xi + u_s, \eta + \nabla u_s) - a_0^s(x, \xi' + \upsilon_s, \eta' + \nabla \upsilon_s))(u_s - \upsilon_s + \xi - \xi') \right\} w dx.$$

С помощью неравенства (2.12) устанавливаем, что для любого $s \in \mathbf{N}$

$$2^{-m} |\xi - \xi'|^m \operatorname{mes}(Q_l(y) \cap \Omega_s) + \int_{\Omega_s} |\nabla w_s|^m w dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u_s - \upsilon_s\|_{0,s}^m + (cI_s)^{\frac{m}{m_2}} \left[1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)(l - 1)^{-\frac{n}{m}} + \|u_s\|_{0,s} + \|\upsilon_s\|_{0,s} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\Omega_s} |\nabla u_s|^m w dx \right)^{\frac{1}{m}} + \left(\int_{\Omega_s} |\nabla \upsilon_s|^m w dx \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{m}{m_2}(m_2 - m)}.$$

Отсюда, используя (2.5), слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ к θ и лемму 2.4, выводим неравенство

$$\left(l^n \varlimsup_{t \to \infty} I_{s_t} \right)^{\frac{m}{m_2}} \geqslant c_{15} h^{\frac{m}{m_2}(m - m_2)} (|\xi - \xi'|^m + \sigma), \tag{2.66}$$

где $h = 1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|$, $\sigma = l^n \varlimsup_{t \to \infty} \int_{\Omega_{s_t}} |\nabla w_{s_t}|^m w dx$.

Используя лемму 2.4, предложение 2.2, условие (2.2) и слабую сходимость $\{w_{s_t}\}$ к $u-\upsilon$, находим, что

$$\sigma \geqslant c_{16}|\eta-\eta'|^m - c_{17}h^m l^{-1}.$$

Отсюда и из (2.66) вытекает, что

$$\left(l^n \varlimsup_{t\to\infty} I_{s_t}\right)^{\frac{m}{m_2}} \geqslant c_{18} h^{\frac{m}{m_2}(m-m_2)} (|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^m - c_{19}h^m l^{-1}. \tag{2.67}$$

Далее, пусть Φ – функция, стоящая в левой части неравенства (2.65). Используя слабую сходимость $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$ к θ, сильную сходимость $\{f_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к f, g и (2.64), устанавливаем, что последовательность $\{I_{s_t}\}$ сходится к интегралу по Ω от Φw. Тогда, учитывая (2.67), получаем, что если y – лебеговская точка функции Φ, то

$$\Phi(y) \geqslant c_{14} h^{m-m_2} (|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_2}.$$

А поскольку множество всех лебеговских точек функции Φ имеет полную меру, то почти всюду на Ω имеет место неравенство (2.65). Лемма доказана.

2.8. О выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно G-сходящейся подпоследовательности. Введем обозначение: если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, то $A^{\varphi,\psi}$ – оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle A^{\varphi,\psi}u, \upsilon\rangle = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\varphi+u,\psi+\nabla u)\partial_i \upsilon + a_0(x,\varphi+u,\psi+\nabla u)\upsilon\right\}dx.$$

Положим еще $m_3 = m'm''$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ и $a \in \mathcal{M}^{n+1}$ такие, что выполняются условия:*

1) *для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbf{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbf{R}^n$ имеем*

$$\sum_{i=0}^n |a_i(x,0,0)| = 0, \tag{2.68}$$

$$\sum_{i=0}^n |a_i(x,\xi,\eta)-a_i(x,\xi',\eta')|^{m'} \leqslant c_{20}(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_3}(|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_3}, \tag{2.69}$$

$$\sum_{i=0}^n (a_i(x,\xi,\eta)-a_i(x,\xi',\eta'))(\eta_i-\eta_i') + (a_0(x,\xi,\eta)-a_0(x,\xi',\eta'))(\xi-\xi') \geqslant$$

$$\geqslant c_{14}(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_2}(|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_2}; \tag{2.70}$$

2) *если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $A^{\varphi,\psi}u$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$, то последовательность $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к u и для любого $i \in \{0, 1, ..., n\}$*

$$\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi} u_{s_t} \to a_i(\cdot,\varphi(\cdot)+u(\cdot),\ \psi(\cdot)+\nabla u(\cdot))$$

слабо в $L^{m'}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть H – счетное всюду плотное множество в $L^m(\Omega)$, H_n – счетное всюду плотное множество в $(L^m(\Omega))^n$. Применяя к последовательностям $\{A_s^{\varphi,\psi}\}$, $\varphi \in H$, $\psi \in H_n$ теорему 1.3 (это возможно в силу (2.38)–(2.40)) и используя оценки (2.43), (2.47), устанавливаем: существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$, обратимые операторы $b^{\varphi,\psi}\colon W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$ и операторы $\gamma_i^{\varphi,\psi}\colon W^{1,m}(\Omega) \to L^{m'}(\Omega)$ $(\varphi \in H,\ \psi \in H_n,\ i \in \{0,1,\dots,n\})$ такие, что выполняется следующее условие:

если $\varphi \in H$, $\psi \in H_n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $b^{\varphi,\psi}u$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$, то последовательность $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к u и для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi} u_{s_t} \to \gamma_i^{\varphi,\psi} u$ слабо в $L^{m'}(\Omega)$. (2.71)

Пусть $\varphi, \tilde\varphi \in H$, $\psi, \tilde\psi \in H_n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$. Используя оценки (2.38)–(2.40), (2.44), условие (2.71) и предложение 1.5, находим, что

$$\|b^{\varphi,\psi}u - b^{\tilde\varphi,\tilde\psi}u\|_* \leq c_{21}\kappa(\lambda_{\varphi,\psi} + \lambda_{\tilde\varphi,\tilde\psi})^{4mm_2}(1+\|u\|)^{m-1}(\|\varphi - \tilde\varphi\|_\Omega + \|\psi - \tilde\psi\|_\Omega)^\alpha, \tag{2.72}$$

где $\kappa = \inf\left\{\sup\limits_s \|p_s\|_{\mathcal{L}_s} : \{p_s\} \in \mathcal{P}\right\}$, $\alpha = \dfrac{1}{m_2}\left(\dfrac{m_1}{m'}\right)^2$. Кроме того, взяв произвольные $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $w \in L^m(\Omega)$ и используя (2.38)–(2.40), (2.71), (2.72) и предложение 1.5, получаем

$$\left|\int\limits_\Omega (\gamma_i^{\varphi,\psi}u - \gamma_i^{\tilde\varphi,\tilde\psi}u)w\,dx\right| \leq$$
$$\leq c_{22}\kappa^3(\lambda_{\varphi,\psi} + \lambda_{\tilde\varphi,\tilde\psi})^{8mm_2}(1+\|u\|)^{2m}(\|\varphi - \tilde\varphi\|_\Omega + \|\psi - \tilde\psi\|_\Omega)^{\alpha\bar m}\|w\|_\Omega. \tag{2.73}$$

Из (2.72) вытекает, что если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$ и $\{\varphi_j\} \subset H$, $\varphi_j \to \varphi$ в $L^m(\Omega)$, $\{\psi_j\} \subset H_n$, $\psi_j \to \psi$ в $(L^m(\Omega))^n$, то последовательность $\{b^{\varphi_j,\psi_j}u\}$ сильно сходится в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ к некоторому элементу, который не зависит от самого выбора последовательностей $\{\varphi_j\} \subset H$, $\{\psi_j\} \subset H_n$, сходящихся к φ, ψ соответственно в $L^m(\Omega)$ и $(L^m(\Omega))^n$. Поэтому для $\varphi \in L^m(\Omega)$ и $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ можно определить оператор $B^{\varphi,\psi}$ из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$, полагая для $u \in W^{1,m}(\Omega)$

$$B^{\varphi,\psi}u = \lim_{j\to\infty} b^{\varphi_j,\psi_j}u,$$

где $\{\varphi_j\} \subset H$, $\varphi_j \to \varphi$ в $L^m(\Omega)$, $\{\psi_j\} \subset H_n$, $\psi_j \to \psi$ в $(L^m(\Omega))^n$.

Аналогично, учитывая (2.73), для $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$ можно определить оператор $\Gamma_i^{\varphi,\psi}$ из $W^{1,m}(\Omega)$ в $L^{m'}(\Omega)$, полагая для $u \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\Gamma_i^{\varphi,\psi}u = w - \lim_{j\to\infty} \gamma_i^{\varphi_j,\psi_j}u,$$

где $\{\varphi_j\} \subset H$, $\varphi_j \to \varphi$ в $L^m(\Omega)$, $\{\psi_j\} \subset H_n$, $\psi_j \to \psi$ в $(L^m(\Omega))^n$, $w - \lim$ означает слабый предел в $L^{m'}(\Omega)$.

Теперь, используя условие (2.71), лемму 2.3 и определение операторов $B^{\varphi,\psi}$, $\Gamma_i^{\varphi,\psi}$, устанавливаем, что выполняется условие:

если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $B^{\varphi,\psi}u$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$, то последовательность $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к u и для любого $i \in \{0, 1, ..., n\}$ $\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi} u_{s_t} \to \Gamma_i^{\varphi,\psi} u$ слабо в $L^{m'}(\Omega)$. (2.74)

Далее, пусть для $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ $\alpha_{i,\xi,\eta} = \Gamma_i^{\varphi,\psi}\theta$, где $\varphi \in L^m(\Omega)$ и $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ таковы, что $\forall x \in \Omega$ $\varphi(x) = \xi$, $\psi(x) = \eta$; $\mathcal{E}_{i,\xi,\eta}$ – множество всех лебеговских точек функции $\alpha_{i,\xi,\eta}$. Пусть еще $\mathcal{H}$ – счетное всюду плотное множество в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $(0,0) \in \mathcal{H}$; для любого $i \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\mathcal{E}_i = \bigcap_{(\xi,\eta)\in\mathcal{H}} \mathcal{E}_{i,\xi,\eta}; \quad \mathcal{E} = \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{E}_i.$$

Используя условие (2.74) и лемму 2.7, получаем, что для $i \in \{0, 1, ..., n\}$, ξ, $\xi' \in \mathbf{R}$, η, $\eta' \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathcal{E}_{i,\xi,\eta} \cap \mathcal{E}_{i,\xi',\eta'}$

$$|\alpha_{i,\xi,\eta}(y) - \alpha_{i,\xi',\eta'}(y)|^{m'} \leq c_{23}(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_3}(|\xi-\xi|+|\eta-\eta'|)^{m_3}. \tag{2.75}$$

Отсюда следует, что если $i \in \{0,1,\dots,n\}$, $y \in \mathcal{E}_i$, $(\xi,\eta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $\forall k \in \mathbf{N}$ $(\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{H}$ и $(\xi_k, \eta_k) \to (\xi, \eta)$ в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, то последовательность $\{\alpha_{i,\xi_k,\eta_k}(y)\}$ сходится к некоторому числу, которое не зависит от самого выбора последовательности $(\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{H}$, сходящейся к (ξ, η). Учитывая этот факт, определим для любого $i \in \{0, 1, ..., n\}$ функцию β_i на $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, полагая

$$\beta_i(y,\xi,\eta) = \lim_{k\to\infty} \alpha_{i,\xi_k,\eta_k}(y),$$

если $(y,x,\eta) \in \mathcal{E}_i \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ (здесь $(\xi_k,\eta_k) \in \mathcal{H}$, $(\xi_k,\eta_k) \to (\xi,\eta)$) и $\beta_i(y,\xi,\eta) = 0$, если $(y,\xi,\eta) \in (\Omega \setminus \mathcal{E}_i) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Используя условие (2.74), соотношения (2.10)–(2.12) и включение $(0, 0) \in \mathcal{H}$, устанавливаем, что для любых $i \in \{0, 1, ..., n\}$ и $y \in \mathcal{E}_i$ $\beta_i(y,0,0) = 0$. Кроме того, используя (2.75), получаем, что для $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $y \in \mathcal{E}_i$, $\xi, \xi' \in \mathbf{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbf{R}^n$

$$|\beta_i(y,\xi,\eta) - \beta_i(y,\xi',\eta')|^{m'} \leq c_{23}(1+|\xi|+|\xi'|+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_3}(|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{m_3}.$$

Установленные свойства функций β_i позволяют заключить, что $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}$ $\beta_i \in \mathcal{M}$.

Пусть теперь $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, причем $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}$ $a_i = \beta_i$. Ясно, что для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство (2.68), а для любых $x \in \mathcal{E}$, ξ, $\xi' \in \mathbf{R}$, η, $\eta' \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство (2.69). Кроме того, в силу условия (2.74) и леммы 2.8 для почти всех $x \in \Omega$ и любых ξ, $\xi' \in \mathbf{R}$, η, $\eta' \in \mathbf{R}^n$ имеет место неравенство (2.70). Таким образом, выполняется условие 1).

Из определения a_i и неравенства (2.75) вытекает, что если $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_{i,\xi,\eta}$, то $a_i(y,\xi,\eta) = \alpha_{i,\xi,\eta}(y)$. Используя этот факт, условие (2.74), лемму 2.7, неравенство (2.69), устанавливаем, что для любых $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\Gamma_i^{\varphi+u,\psi+\nabla u}\theta = a_i(\cdot, \varphi(\cdot)+u(\cdot), \psi(\cdot)+\nabla u(\cdot)) \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{2.76}$$

Заметим еще, что в силу условия (2.74) для любых $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u, w \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle B^{\varphi,\psi}u, w\rangle = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} (\Gamma_i^{\varphi,\psi}u)\partial_i w dx. \tag{2.77}$$

Пусть теперь $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$. Покажем, что

$$B^{\varphi,\psi}u = A^{\varphi,\psi}u, \tag{2.78}$$

$\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\Gamma_i^{\varphi,\psi}u = a_i(\cdot, \varphi(\cdot) + u(\cdot), \psi(\cdot) + \nabla u(\cdot)) \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{2.79}$$

Прежде всего заметим, что в силу (2.69) и (2.70) оператор $A^{\varphi,\psi}$ обратим. Положим $\upsilon = (A^{\varphi,\psi})^{-1}(B^{\varphi,\psi}u)$. Применяя (2.77) к $\varphi + \upsilon$, $\psi + \nabla\upsilon$, θ и произвольной функции $w \in W^{1,m}(\Omega)$, а затем используя (2.76), устанавливаем, что

$$B^{\varphi+\upsilon,\psi+\nabla\upsilon}\theta = A^{\varphi,\psi}\upsilon. \tag{2.80}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящуюся к $B^{\varphi,\psi}u$, и положим для любого $s \in \mathbf{N}$

$$u_s = (A_s^{\varphi+\upsilon,\psi+\nabla\upsilon})^{-1} f_s, \quad \upsilon_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s.$$

Легко видеть, что

$$\forall s \in \mathbf{N} \quad u_s = \upsilon_s - q_s\upsilon. \tag{2.81}$$

Из условия (2.74) вытекает, что последовательность $\{\upsilon_{s_t}\}$ слабо сходится к u и $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\Gamma_{i,s_t}^{\varphi,\psi}\upsilon_{s_t} \to \Gamma_i^{\varphi,\psi}u \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.82}$$

Кроме того, из определения υ, равенства (2.80) и условия (2.74) следует, что последовательность $\{u_{s_t}\}$ слабо сходится к θ и $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\Gamma_{i,s_t}^{\varphi+\upsilon,\psi+\nabla\upsilon}u_{s_t} \to \Gamma_i^{\varphi+\upsilon,\psi+\nabla\upsilon}\theta \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.83}$$

Из установленной сходимости последовательностей $\{u_{s_t}\}$, $\{\upsilon_{s_t}\}$, (2.81) и (2.4) выводим, что $u = \upsilon$. Отсюда и из определения υ получаем (2.78). Наконец, используя (2.81)–(2.83), (2.76) и равенство $u = \upsilon$, получаем (2.79).

Теперь из условия (2.74) и (2.78), (2.79) выводим, что выполняется условие 2). Теорема доказана.

Из теоремы 2.4 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.5. *Существует возрастающая последовательность* $\{s_t\} \subset \mathbf{N}$ *и* $a \in \mathcal{M}^{n+1}$ *такие, что оператор A обратим и последовательность* $\{A_{s_t}\}$ *сильно G-сходится к оператору A.*

Используя эту теорему, получаем такой результат.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть A – обратимый оператор из* $W^{1,m}(\Omega)$ *в* $(W^{1,m}(\Omega))^*$ *и последовательность* $\{A_s\}$ *G-сходится к оператору A. Тогда существуют функции* $a_i \in \mathcal{M}$, $i = 0, 1, \dots, n$, *такие, что для любых* $u, \upsilon \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, \upsilon\rangle = \int_{\Omega} \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)\partial_i\upsilon + a_0(x, u, \nabla u)\upsilon\right\}dx.$$

2.9. Усреднение операторов A_s в периодическом случае. Пусть $r \in (0,1)$, $\Pi = Q_1(0) \setminus B(0, r/2)$, для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $Q^i = \{x \in \partial Q_1(0)\colon\ x_i = -1/2\}$, e^i – орт i-го направления в $\mathbf{R}^n$. Через $W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi)$ обозначим замыкание в $W^{1,m}(\Pi)$ множества всех функций $u \in C^1(\overline{\Pi})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $x \in Q^i$ $u(x) = u(x + e^i)$.

Из неравенств (2.11), (2.12) и результатов [35] о разрешимости уравнений с монотонными операторами вытекает, что если $(y, \xi, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, то существует единственная функция $u_{y,\xi,\eta} \in W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi)$ с нулевым средним значением по Π такая, что

$$\forall \upsilon \in W^{1,m}_{\mathrm{per}}(\Pi) \quad \int_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^1(y, \xi, \eta + \nabla u_{y,\xi,\eta}) \partial_i \upsilon \right\} dx = 0. \tag{2.84}$$

Далее будем предполагать, что для любых $x, y \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^1(x, \xi, \eta) - a_i^1(y, \xi, \eta)| \le \mu(|x - y|)(1 + |\xi| + |\eta|)^{m-1}, \tag{2.85}$$

где μ – неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$. Используя (2.11)–(2.14), (2.84), (2.85), устанавливаем, что существует $a \in \mathcal{M}^{n+1}$ такое, что для любых $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $(y, \xi, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$

$$a_i(y, \xi, \eta) = \int_{\Pi} a_i^1(y, \xi, \eta + \nabla u_{y,\xi,\eta}) dx. \tag{2.86}$$

Положим для любого $s \in \mathbf{N}$

$Z_s = \{z \in \mathbf{R}^n\colon\ sz_i \in \mathbf{Z},\ \ i = 1, \ldots, n;\ \ \overline{Q_s(z)} \subset \Omega\}$.

ТЕОРЕМА 2.7. *Пусть выполняются условия: для любого $s \in \mathbf{N}$ $\{x_s^j\colon\ j \in J_s\} = Z_s$; для любых $s \in \mathbf{N}, j \in J_s$ $r_s^j = r/(2s)$; для любых $s \in \mathbf{N}$ и $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $a_i^s = a_i^1$. Тогда оператор A обратим и последовательность $\{A_s\}$ сильно G-сходится к оператору A.*

Доказательство. В силу теоремы 2.4 можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что существует $b \in \mathcal{M}^{n+1}$ такое, что оператор B обратим и выполняется условие:

если $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, $u \in W^{1,m}(\Omega)$, последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $B^{\varphi,\psi}u$, для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$, то последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u и для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi} u_s \to b_i(\cdot, \varphi(\cdot) + u(\cdot), \psi(\cdot) + \nabla u(\cdot)) \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.87}$$

Пусть (y, ξ, η) – произвольная тройка из $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$, причем $\forall x \in \Omega$ $\varphi(x) = \xi$, $\psi(x) = \eta$. Возьмем последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящуюся к $B^{\varphi,\psi}\theta$, и положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $u_s = (A_s^{\varphi,\psi})^{-1} f_s$. В силу условия (2.87) последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к θ и

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \Gamma_{i,s}^{\varphi,\psi} u_s \to b_i(\cdot, \xi, \eta) \text{ слабо в } L^{m'}(\Omega). \tag{2.88}$$

Положим для любого $s \in \mathbf{N}$ $Z_s^0 = \{z \in \mathbf{R}^n\colon\ sz_i \in \mathbf{Z},\ i = 1, \ldots, n\}$, и пусть $\tilde{u}_{y,\xi,\eta}$ – продолжение функции $u_{y,\xi,\eta}$ на $Q_1(0)$, принадлежащее $W^{1,m}(Q_1(0))$; для любого $s \in \mathbf{N}$ $\tilde{w}_s$ – функция на $\mathbf{R}^n$ такая, что $\tilde{w}_s(x) = s^{-1}\tilde{u}_{y,\xi,\eta}(s(x-z))$, если $x \in Q_s(z)$, $z \in Z_s^0$; w_s – сужение $\tilde{w}_s$ на Ω_s. Для любого $s \in \mathbf{N}$ имеем $w_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$. Нетрудно проверить, что последовательность $\{w_s\}$ слабо сходится к θ.

Возьмем произвольное натуральное число $l \geqslant 2$ такое, что $\overline{Q_{l-1}(y)} \subset \Omega$, и функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ со свойствами: $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ в $\mathbf{R}^n$, $\chi = 1$ на $Q_l(y)$, $\chi = 0$ на $\mathbf{R}^n \setminus Q_{l-1}(y)$. Используя (2.84) и слабую сходимость $\{u_s\}$, $\{w_s\}$ к θ, устанавливаем

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^1(y,\xi,\eta+\nabla w_s)\partial_i(w_s-u_s) \right\} \chi dx = 0.$$

Отсюда и из равенства $A_s^{\varphi,\psi}u_s = f_s$, используя (2.12), (2.85) и слабую сходимость $\{u_s\}$, $\{w_s\}$ к θ, выводим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{Q_l(y)\cap\Omega_s} |\nabla w_s - \nabla u_s|^m \, dx \leqslant o(l^{-n}). \tag{2.89}$$

Заметим еще, что в силу (2.85), (2.86)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^n \left| \int_{Q_l(y)\cap\Omega_s} a_i^1(x,\xi+w_s,\eta+\nabla w_s)dx - l^{-n}a_i(y,\xi,\eta) \right| \leqslant o(l^{-n}). \tag{2.90}$$

Из (2.88)–(2.90) выводим, что для любого $i \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$\lim_{l\to\infty} l^n \int_{Q_l(y)} b_i(x,\xi,\eta)dx = a_i(y,\xi,\eta).$$

Полученный результат позволяет заключить, что если $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, то для почти всех $y \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ $b_i(y,\xi,\eta) = a_i(y,\xi,\eta)$. Тогда $A = B$ и, значит, оператор A обратим. Кроме того, из условия (2.87) вытекает, что последовательность $\{A_s\}$ сильно G-сходится к оператору A. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Spagnolo S.* Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 1967. V. 21. P. 657–699.
2. *Spagnolo S.* Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellitiche // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 1968. V. 22. P. 571–597.
3. *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellitici del secondo ordine // Boll. Un. Mat. Ital. 1973. V. 8, № 3. P. 391–411.
4. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34, вып. 5. С. 65–133.
5. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* О G-сходимости параболических операторов // УМН. 1981. Т. 36, вып. 1. С. 11–58.
6. *Райтум У.Е.* К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами // ДАН СССР. 1981. Т. 243, № 1. С. 30–33.
7. *Райтум У.Е.* К потере гладкости дифференциальных операторов при G-сходимости // Дифференц. уравн. 1984. Т. 20, № 3. С. 508–513.
8. *Панков А.А.* Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида // ДАН СССР. 1984. Т. 278, № 1. С. 37–41.
9. *Панков А.А.* Усреднение нелинейных почти периодических эллиптических операторов // ДАН УССР. Сер. А. 1985. № 5. С. 19–21.

10. *Панков А.А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов // Препринт 2.88. Львов ИППММ АН УССР, 1988.
11. *Куньч Р.Н., Панков А.А.* G-сходимость монотонных параболических операторов // ДАН УССР. Сер. А. 1986. № 8. С. 8–10.
12. *Хруслов Е.Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Матем. сб. 1977. Т. 103, № 4. С 614–629.
13. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Матем. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
14. *Хруслов Е.Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1981. С. 129–173.
15. *Хруслов Е.Я.* Усредненная модель нестационарной диффузии в трещиновато-пористых средах // Препринт 50.88. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1988.
16. *Берлянд Л.В., Чудинович И.Ю.* Усреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 4. С. 777–780.
17. *Ковалевский А.А.* Вторая краевая задача для вариационных эллиптических уравнений в областях сложной структуры // Препринт 84.40. Киев: ИМ АН УССР, 1984.
18. *Ковалевский А.А.* Усреднение переменных вариационных задач // ДАН УССР. Сер. А. 1988. № 8. С. 6–9.
19. *Ковалевский А.А.* О связанности подмножеств соболевских пространств и Г-сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейн. гранич. задачи. 1989. Вып. 1. С. 48–54.
20. *Ковалевский А.А.* О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1989. С. 62–70.
21. *Ковалевский А.А.* Условия Г-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // ДАН УССР. 1991. № 4. С. 5–8.
22. *Панкратов Л.С.* Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей // Препринт 11.87. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1987.
23. *Панкратов Л.С.* О сходимости решений вариационных задач в слабо связанных областях // Препринт 53.88. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1988.
24. *Панкратов Л.С.* Асимптотическое поведение решений вариационных задач в областях с "накопителями" // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1990. Вып. 54. С. 97–105.
25. *Скрыпник И.В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // ДАН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–25.
26. *Скрыпник И.В.* О сходимости решений нелинейной задачи Дирихле при измельчении границы области // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1982. Т. 115. С. 236–250.
27. *Скрыпник И.В.* Усреднение квазилинейных эллиптических задач в перфорированных областях // УМН. 1985. Т. 40, вып. 4. С. 197–198.
28. *Скрыпник И.В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1049–1053.
29. *Ковалевсќй А.А.* G-сходимость абстрактных операторов с различными областями определения // ДАН УССР. Сер. А. 1989. № 3. С. 20–23.
30. *Ковалевский А.А.* G-сходимость операторов, определенных на различных банаховых пространствах, и сходимость решений вариационных неравенств // ДАН УССР. Сер. А. 1989. № 5. С. 15–17.
31. *Ковалевский А.А.* О сильной G-сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с перфорированными областями // ДАН УССР. Сер. А. 1990. № 7. С. 14–17.
32. *Ковалевский А.А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Препринт 90.01. Донецк: ИПММ АН УССР, 1990.
33. *Ковалевский А.А.* О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи. 1991. Вып. 3. С. 26–35.
34. *Ковалевский А.А.* О сходимости решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44, № 2. С. 191–197.

35. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
36. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
37. *Boccardo L., Capuzzo D.* *G*-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale // Boll. Un. Mat. Ital. 1975. V. 12, № 1–2. P. 115–123.
38. *Attouch H., Konishi Y.* Convergence d'operateur maximaux monotones et inequations variationnelles // C.r. Acad. Sci. Ser. A. 1976. V. 282, № 9. P. 467–469.
39. *Boccardo L., Marcellini P.* Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali // Ann. mat. pura. ed appl. 1976. V. 110. P. 137–159.
40. *Жиков В.В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 47–84.

Ин-т прикладной математики
и механики АН Украины

Поступило в редакцию
25. XII. 1992