ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины. 2004. Вып. 9

УДК 517.5

©2004. **Е.А. Севостьянов**

О СХОДИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КЛАССА СОБОЛЕВА

Статья посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в многочисленных работах ведущих специалистов по теории отображений, таких как К.Астала, Е.Вилламор, Ф.Геринг, Т.Иванец, П.Коскела, Дж.Манфреди, Г.Мартин, О.Мартио, У.Сребро и других, см., напр., [1]–[10]. В частности, в статье доказано, что локально равномерный предел f последовательности f_m пространственных гомеоморфизмов класса $W_{loc}^{1,n}$ с внешними дилатациями $K_0(x, f_m) \leq K(x) \in L_{loc}^{n-1}$ является гомеоморфизмом или постоянной. Если f - гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$, то также $K_0(x, f) \leq K(x)$ п.в.

Приведём некоторые обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п.в.), пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$|f'(x)| \ = \ \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|} \tag{1}$$

– матричная норма $f'(x)$. Везде по тексту $mes\, A$ означает n-мерную меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Внешняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) \ = \ \frac{|f'(x)|^n}{|J(x, f)|}, \tag{2}$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Отметим, что гомеоморфизмы класса Соболева $W_{loc}^{1,n}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, почти всюду дифференцируемы и обладают $(N)-$свойством Лузина, см. [11] – [12]. Кроме того, если $K_0(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$, то $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$, см. [3], а потому f обладает $(N^{-1})-$свойством, которое эквивалентно условию, что $J(x, f) \neq 0$ п.в., см. [13].

В дальнейшем мы используем сферическую (хордальную) метрику $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$ в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \ x \neq \infty \neq y. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, последовательность гомеоморфизмов класса $W_{loc}^{1,n}$, такая что $f_m \to f \not\equiv const$ при $m \to \infty$ локально равномерно в D. Если $f \in W_{loc}^{1,n}$ и для п.в. $x \in D$

$$K_0(x, f_m) \ \leq \ K(x) \ \in \ L_{loc}^{n-1}(D), \tag{4}$$

то f – гомеоморфизм и для п.в. $x \in D$

$$K_0(x, f) \ \leq \ K(x). \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,n}_{loc}(D)$, сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$. Если условие (4) имеет место, то f либо гомеоморфизм, либо $f \equiv const$ в D.

Доказательство Леммы 1. Как локально равномерный предел непрерывных отображений f_m, отображение f непрерывно. Пусть f не тождественно постоянна в D.

Покажем сначала, что f – дискретное отображение. Предположим противное. Тогда найдётся точка $x_0 \in D$ и последовательность $x_k \in D$, $x_k \neq x_0$, $k = 1, 2 \ldots,$ такая что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, а $f(x_k) = f(x_0)$. Заметим, что множество $E_0 = \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$ замкнуто по непрерывности f и не совпадает с D, т.к. $f \not\equiv const$. Поэтому x_0 можно заменить неизолированной граничной точкой E_0. Таким образом, без ограничения общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$, $f_m(0) = f(0) = 0$, $\overline{B(0, 1)} \subset D$ и, кроме того, найдётся хотя бы одна точка $y_0 \in B(0, 1)$, где $f(y_0) \neq 0$. В силу непрерывности хордальной метрики,

$$h(f_m(0), 0) \geq \varepsilon_0/2\,, \qquad m \geq M, \tag{6}$$

где $\varepsilon_0 = h(f(y_0), 0) > 0$. По Теореме 6.1 из [3] $f_m^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$, а тогда по Следствию 3.5 в работе [14] отображения f_m являются Q – гомеоморфизмами с $Q(x) = K^{n-1}(x)$. Применяя к отображениям f_m Лемму из работы [15], получаем, что для всех $x \in B(0, r)$ и $r = \min\{\frac{|y_0|}{2}, 1 - |y_0|\}$

$$|f_m(x)| \ \geq \ \psi(|x|)\,, \quad m \geq M, \tag{7}$$

где ψ – строго возрастающая функция, $\psi(0) = 0$, которая зависит только от нормы K в $L^{n-1}(B(0, 1))$, n и ε_0. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|f(x)| \ \geq \ \psi(|x|). \tag{8}$$

Т.к. $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, то при $k \geq k_0$ имеем, что $x_k \in B(0, r)$. Поэтому согласно неравенству (8)

$$|f(x_k)| \ \geq \ \psi(|x_k|), \quad k \geq k_0.$$

Однако, по условию $f(x_k) = f(0) = 0,$ откуда имеем что $\psi(|x_k|) = 0$ при всех $k \geq k_0$, что противоречит строгому возрастанию функции ψ. Полученное противоречие говорит о том, что f дискретно.

Покажем теперь, что f инъективно в D. Предположим противное, а именно, что существуют $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, с $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть $x_2 \notin \overline{B(x_1, t)} \subset D$ при $t \in (0, t_0]$. Тогда $f_m(\partial B(x_1, t))$ отделяет $f_m(x_1)$ от $f_m(x_2)$ и

$$h(f_m(x_1), f_m(\partial B(x_1, t)) \ < \ h(f_m(x_1), f_m(x_2)\,. \tag{9}$$

Пусть расстояние $h(f_m(x_1), f_m(\partial B(x_1, t))$ достигается на элементе $x_{m,t} \in \partial B(x_1, t)$, т.е., $h(f_m(x_1), f_m(\partial B(x_1, t)) = h(f_m(x_1), f_m(x_{m,t}))$. Поскольку граница шара в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством, найдётся подпоследовательность $x_{m_k,t} \to x_t \in \partial B(x_1, t)$. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций в метрическом пространстве влечёт непрерывную сходимость, см. [16], Теорема 3, стр.229, получаем, что $h(f_{m_k}(x_{m_k,t}), f(x_t)) \to 0$ при $k \to \infty$. Но тогда с учётом неравенства (9) имеем, что

$$h(f(x_1), f(x_t)) \ \le \ h(f(x_1), f(x_2)).$$

Так как, по предположению, $h(f(x_1), f(x_2)) = 0$, то из последнего неравенства следует, что $f(x_t) = f(x_1)$, для всех $t \in (0, t_0]$, что противоречит дискретности отображения f. Непрерывность обратного отображения f^{-1} следует также из (8). Лемма 1 доказана. $\Box$

Доказательство Теоремы 1. Пусть $f \not\equiv const$ в D, тогда f – гомеоморфизм по Лемме 1. Таким образом, остаётся показать, что $K_0(x, f) \le K(x)$ п.в. в D. По Теореме 4 из [11], стр.31, т.к. f – гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}(D)$, то f дифференцируемо почти всюду в D. Покажем, что для каждой точки дифференцируемости $x \in D$ отображения f имеет место соотношение

$$K_0(x, f) \ \le \ \liminf_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} K(y)\, dy, \tag{10}$$

где $C(x, h)$ – n-мерный куб со стороной длины h, рёбра которого ориентированы вдоль главных осей квадратичной формы $(f'(x)z, f'(x)z)$. Без ограничения общности можно считать, что $x = 0$, $f(0) = 0$ и $f'(0) \ne 0$. Пусть $C(h) = C(0, h)$, $e_1, \ldots, e_n$ – главные векторы линейного отображения $f'(0)$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – соответствующие им растяжения, $\lambda_1 \le \lambda_2 \ldots \le \lambda_n$. Т.к. $f'(0) \ne 0$, то $\lambda_n > 0$. Далее,

$$\lim_{x \to 0} \ \frac{|f(x) - f'(0) \cdot x|}{|x|} \ = \ 0$$

и, следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, h \in (0, \delta) \ \ \forall\, x \in C(h)$

$$|f(x) - f'(0) \cdot x| \ < \ h\varepsilon.$$

В силу локально-равномерной сходимости f_m к f имеем $\forall\, h \in (0, \delta)\ \forall\, x \in C(h) \ \ \forall j \ge j_0 = j_0(h):$

$$|f_j(x) - f'(0) \cdot x| \ < \ h\varepsilon. \tag{11}$$

Заметим,что $f'(0)C(h) = \prod\limits_{i=1}^{n}(-\frac{\lambda_i h}{2}, \frac{\lambda_i h}{2})$ – прямоугольный параллелепипед, оси которого ориентированы вдоль векторов $\tilde{e_1}, \ldots \tilde{e_n}$, где $\tilde{e_1}, \ldots \tilde{e_n}$ – соответствующая ортогональная система векторов, включающая все векторы $\tilde{e_i} = \frac{f'(0)e_i}{|f'(0)e_i|}$ с ненулевыми $|f'(0)e_i| = \lambda_i \ne 0$. Отсюда, в силу (11), получаем, что при $j \ge j_0 = j_0(h)$ все $f_j(y)$ лежат в прямоугольном параллелепипеде $\prod\limits_{i=1}^{n}(-(\frac{\lambda_i}{2} + \varepsilon)h, (\frac{\lambda_i}{2} + \varepsilon)h)$, оси которого ориентированы вдоль векторов $\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n}$. Отсюда получаем, что $mes\, f_j(C(0, h)) \ \le \ h^n[|J(0, f)| + \Delta(\varepsilon)]$, где $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и по теореме Лебега о локально-конечных мерах, см. [17],

$$\int\limits_{C(h)} |J(y, f_j)| dy \ \le \ h^n[|J(0, f)| + \Delta(\varepsilon)]. \tag{12}$$

Рассмотрим $n-1$ – мерный куб $C^*(h)$ с центром в нуле и длиной ребра h, ориентированный вдоль векторов $e_1,\ldots,e_{n-1}$. Пусть $l(z)$ – отрезок, проходящий через точку $z\in C^*(h)$, перпендикулярный $C^*(h)$ и находящийся внутри $C(h)$. Пусть $l_j(z)$ – длина кривой $f_j(l(z))$. Т.к. $f\in ACL$, имеем

$$l_j(z)=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|f_j'(z,y_n)e_n|\;dy_n$$

при п.в. $z\in C^*(h)$ относительно $(n-1)$-мерной меры Лебега. С другой стороны, из (11) получаем, что

$$l_j(z)\ \geq\ \lambda_n h-2h\varepsilon$$

при п.в. z. Поэтому

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|f_j'(z,y_n)e_n|\;dy_n\ \geq\ \lambda_n h-2h\varepsilon$$

при п.в. z. Интегрируя по $z\in C^*(h)$ и применяя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{C(h)}|{f_j}'(y)e_n|\;dy\geq\ h^n(\lambda_n-2\varepsilon).\tag{13}$$

Далее, используя (12) и неравенство Гёльдера, получаем:

$$\int\limits_{C(h)}|{f_j}'(y)e_n|dy\ \leq\int\limits_{C(h)}\|{f_j}'(y)\|dy\ =\int\limits_{C(h)}K_0^{\frac{1}{n}}(y,f_j)|J(y,f_j)|^{\frac{1}{n}}\,dy\ \leq$$

$$\leq\int\limits_{C(h)}K^{\frac{1}{n}}(y)|J(y,f_j)|^{\frac{1}{n}}dy\leq\left(\int\limits_{C(h)}K^{\frac{1}{n-1}}(y)dy\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int\limits_{C(h)}|J(y,f_j)|dy\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq\ h\left[|J(0,f)|+\Delta(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\int\limits_{C(h)}K^{\frac{1}{n-1}}(y)\;dy\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

т.е.,

$$\frac{(\lambda_n-2\varepsilon)^{\frac{n}{n-1}}}{\{|J(0,f)|+\Delta(\varepsilon)\}^{\frac{1}{n-1}}}\ \leq\ \frac{1}{h^n}\int\limits_{C(h)}K^{\frac{1}{n-1}}(y)\;dy.\tag{14}$$

Устремляя здесь сначала $j\to\infty$, затем $h\to 0$ и, наконец, $\varepsilon\to 0$, заключаем, что

$$(K_0(0,f))^{\frac{1}{n-1}}\ \leq\ \liminf_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\int\limits_{C(0,h)}K^{\frac{1}{n-1}}(y)\;\;dy.\tag{15}$$

Далее, в силу интегрального неравенства Иенсена, см.[18], стр.78, для любой возрастающей выпуклой функции $\Phi(t) : [1, +\infty] \to [0, +\infty]$ имеем

$$\Phi(K_0(0,f)^{\frac{1}{n-1}}) \ \le \ \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} \Phi(K^{\frac{1}{n-1}}(y))\ dy.$$

Выбирая $\Phi(t) = t^{n-1}$, получаем

$$K_0(0,f) \ \le \ \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} K(y)\ dy.$$

Таким образом, в каждой точке дифференцируемости отображения f

$$K_0(x,f) \ \le \ \liminf_{h\to 0} \ \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} K(y)\ dy.$$

По теореме о дифференцируемости неопределённого интеграла (см., напр., [17], с.180) имеем, что $K_0(x,f) \le K(x)$ для п.в. $x \in D$. Теорема 1 доказана. $\Box$

Предложение 1. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность ACL гомеоморфизмов с $K_0(x, f_m) \le K(x) \in L^q_{loc}$, $q \ge 1/(n-1)$, которая сходится локально-равномерно в D к отображению f. Тогда $f \in W^{1,s}_{loc}(D)$, где $s = nq/(1+q) \le n$.

Доказательство. Поскольку $f_m(x)$ класса ACL в D, каждое f_m имеет п.в. частные производные в D, $\partial_i f_m$, $i = 1, \ldots, n$. По неравенству Гёльдера-Минковского имеем:

$$\|\partial_i f_m\|_{L_s(C)} \ \le \ \|K_0^{\frac{1}{n}}(x, f_m)|J(x, f_m)|^{\frac{1}{n}}\|_{L_s(C)} \ \le$$

$$\le \ \|K^{\frac{1}{n}}\|_{L_p(C)} \cdot \||J(y, f_m)|^{\frac{1}{n}}\|_{L_n(C)} \ \le \ \|K\|^{\frac{1}{n}}_{L_q(C)} \cdot (mes(f_m(C)))^{\frac{1}{n}},$$

где C – замкнутый куб в D, $1/s = 1/n + 1/p$, $p = qn$. В силу локально равномерной сходимости f_m, отображение f непрерывно и точки $f_m(x)$ при всех $x \in C$ и $m = 1, 2, \ldots$ лежат в некотором фиксированном шаре $B \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому $mes\, f_m(C) \ \le \ mes\, B$. Отсюда имеем, что $\partial_i f_m$ при всех $i = 1, \ldots, n$ равномерно ограничены в $L_s(C)$, а значит последовательность f_m ограничена в пространстве $W^{1,s}(C)$. Применяя лемму 3.5 в [19], стр. 250, получаем, что $f \in W^{1,s}_{loc}(D)$. Предложение 1 доказано. $\Box$

Замечание 1. Отметим, что в случае $n = 2$ аналог Теоремы 1 был доказан в работе [20] при более слабых условиях, когда $f_m \in ACL$, $m = 1, 2, \ldots$. Отметим также, что если $K(x) \in L^1_{loc}(D)$, то $f_m \in W^{1,1}_{loc}(D)$, $m = 1, 2, \ldots,$ и $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$.

1. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion, Math. Ann. 317 (2000), 703-726.
2. *Gehring F.W. and Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), 253-264.
3. *Heinonen J. and Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations, Arch. Rat. Mech. Anal. 125 (1993), 81-97.
4. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: compactness, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27, no. 2 (2002), 391-417.
5. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity, Invent. Math. 144, no. 3 (2001), 507-531.

6. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 181-188.
7. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openess, Arch. Rat.Mech. Anal. 160 (2001), 135-151.
8. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N, Michigan Math. J. 49 (2001), 169-181.
9. *Manfredi J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions, Bull. Amer. Math Soc. 32, no.2 (1995), 235-240.
10. *Manfredi J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem, Indiana.Univ.Math. J. 47, no.3 (1998), 1131-1145.
11. *Решетняк Ю.Г.* Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду, Матем. сб. т.75, 3 (1968),323-334.
12. *Решетняк Ю.Г.* Геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 886-919.
13. *Пономарёв С.П.* $(N^{-1})-$свойство отображений и $(N)-$условие Лузина, Матем. заметки 58(1995), 411-418.
14. *Игнатьев А. и Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений (в печати)
15. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q-homeomorphisms, Contemporary Math. 364 (2004), 93-103.
16. *Куратовский К.* Топология, М., Мир, т.1 (1966) – 594с.
17. *Сакс С.* Теория интеграла, М.,ИЛ (1949) – 494с.
18. *М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, Гос. изд. физ.-мат. лит., М. (1958).
19. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением,Новосибирск,Наука (1982) – 285с.
20. *V.Ryazanov, U.Srebro and E.Yakubov.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation, Siberian Advances in Mathematics, v.11, N2, (2001),94-130

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 27.04.2004