О множествах ограниченности решений для класса вырожденных нелинейных эллиптических уравнений четвёртого порядка с L^1-данными

А. А. КОВАЛЕВСКИЙ
*Институт прикладной математики и механики,
Донецк, Украина*
e-mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

Ф. НИКОЛОЗИ
Университет Катаньи, Италия
e-mail: fnicolosi@dmi.unict.it

УДК 517.9

Ключевые слова: вырожденные нелинейные эллиптические уравнения четвёртого порядка, усиленные условия эллиптичности, L^1-данные, задача Дирихле, ограниченность решений.

Аннотация

В статье изучается класс вырожденных нелинейных эллиптических уравнений четвёртого порядка в дивергентной форме с коэффициентами, удовлетворяющими усиленному условию эллиптичности, и правыми частями из L^1, зависящими от искомой функции. Рассматривается задача Дирихле для уравнений из этого класса, для неё доказывается существование решений, ограниченных на множествах, где поведение данных задачи и соответствующих весовых функций достаточно регулярно.

Abstract

A. A. Kovalevsky, F. Nicolosi, On the sets of boundedness of solutions for a class of degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 4, pp. 99—112.

In this article, we deal with a class of degenerate, nonlinear, elliptic fourth-order equations in divergence form with coefficients satisfying a strengthened ellipticity condition and right-hand sides of the class L^1 depending on the unknown function. We consider the Dirichlet problem for equations of the given class and prove the existence of solutions of this problem bounded on the sets where the behavior of the data of the problem and the weighted functions involved is sufficiently regular.

1. Введение

В статье изучается класс вырожденных нелинейных эллиптических уравнений четвёртого порядка в дивергентной форме с коэффициентами, удовлетворяющими усиленному условию эллиптичности, и правыми частями из L^1,

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 4, с. 99—112.

зависящими от искомой функции. Модельным представителем этого класса является уравнение

$$- \sum_{|\alpha|=1} D^{\alpha}\Big[\nu\Big(\sum_{|\beta|=1}|D^{\beta}u|^2\Big)^{(q-2)/2} D^{\alpha}u\Big] + \\ + \sum_{|\alpha|=2} D^{\alpha}\Big[\mu\Big(\sum_{|\beta|=2}|D^{\beta}u|^2\Big)^{(p-2)/2} D^{\alpha}u\Big] = -|u|^{\sigma-1}u + f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad (1.1)$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, $1 < p < n/2$, $2p < q < n$, ν и μ — положительные функции в Ω, $\sigma > 1$ и $f \in L^1(\Omega)$.

Существование решений задачи Дирихле для уравнений данного класса установлено в [8]. Используя результаты [8] и модификацию метода Мозера (см., например, [2]), мы доказываем существование решений той же задачи, ограниченных на тех множествах, где поведение данных задачи достаточно регулярно.

Отметим, что ограниченность и гёльдерова непрерывность решений нелинейных эллиптических уравнений высших порядков и вариационные неравенства с коэффициентами, удовлетворяющими усиленным условиям эллиптичности, уже изучены в [2] (невырожденный случай) и в [4, 5, 10] (вырожденный случай). Однако это было сделано для уравнений с правыми частями из L^t, где $t > t_0 > 1$.

Разрешимость и свойства решений нелинейных уравнений с данными из L^1 рассмотрены, например, в [1, 3, 6—8].

2. Предварительные замечания

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, и пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть $p, q \in \mathbb{R}$ таковы, что $1 < p < n/2$, $2p < q < n$.

Пусть ν — положительная функция на Ω, такая что

$$\nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \Big(\frac{1}{\nu}\Big)^{1/(q-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Обозначим через $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ множество всех функций $u \in L^q(\Omega)$, имеющих для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$, слабую производную $D^{\alpha}u$ со свойством $\nu^{1/q}D^{\alpha}u \in L^q(\Omega)$. Пространство $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \Big(\int\limits_{\Omega} |u|^q\,dx + \sum_{|\alpha|=1}\int\limits_{\Omega} \nu|D^{\alpha}u|^q\,dx\Big)^{1/q}.$$

Замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим через $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Пусть μ — положительная функция на Ω, такая что

$$\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Обозначим через $W^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ множество всех функций $u \in W^{1,q}(\nu,\Omega)$, имеющих для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$, слабую производную $D^\alpha u$ со свойством $\mu^{1/p} D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Пространство $W^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|u\| = \|u\|_{1,q,\nu} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega \mu |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ обозначим $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$.

Предположение 2.1. Существуют такие вещественные числа $\tilde{q} > q$ и $c > 0$, что для каждого $u \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_\Omega |u|^{\tilde{q}} \, dx\right)^{1/\tilde{q}} \leqslant c\left(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \nu |D^\alpha u|^q \, dx\right)^{1/q}.$$

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены четыре полезные леммы. Три из них касаются принадлежности функций специального вида пространствам $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ и некоторых оценок для этих функций. Центральный результат раздела (лемма 3.3) описывает множества ограниченности функций из пространства $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющих совокупности интегральных неравенств.

Пусть $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ — такая неубывающая функция, что $h = 0$ на $(-\infty, 0]$ и $h = 1$ на $[1, +\infty)$.

Положим

$$c' = 2\max_{\mathbb{R}} h', \quad c'' = c' + \max_{\mathbb{R}} |h''|.$$

Пусть для каждого $s \in \mathbb{N}$ определена такая функция $h_s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$h_s(\eta) = \eta + (s+1-\eta)h(\eta - s) - (s+1+\eta)h(-\eta - s), \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\{h_s\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ и для каждого $s \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:

$$h_s(\eta) = \eta, \qquad \text{если } |\eta| \leqslant s, \tag{3.1}$$

$$h_s(\eta) = (s+1)\operatorname{sign}\eta, \quad \text{если } |\eta| \geqslant s+1. \tag{3.2}$$

Более того, для каждых $s \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{R}$ справедливо

$$0 \leqslant h_s'(\eta) \leqslant c', \tag{3.3}$$

$$|h_s''(\eta)| \leqslant c''. \tag{3.4}$$

Из (3.1)—(3.4) следует, что для каждых $s \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{R}$

$$|h_s(\eta)| \leqslant s+1, \tag{3.5}$$

$$|h_s(\eta)| \leqslant 2|\eta|, \tag{3.6}$$

$$h'_s(\eta)|\eta| \leqslant 2c'|h_s(\eta)|, \tag{3.7}$$

$$|h''_s(\eta)|\,|\eta| \leqslant 2c''|h_s(\eta)|. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Пусть $u \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ в Ω. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $t > 1$. Пусть $v = [1 + h_s^2(u)]^r\varphi^t$. Тогда $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и выполняется неравенство*

$$\Bigl(\int_\Omega v^{\tilde q}\,dx\Bigr)^{q/\tilde q} \leqslant (4cc'r)^q \int_\Omega \Bigl\{\sum_{|\alpha|=1} \nu|D^\alpha u|^q\Bigr\}[1 + h_s^2(u)]^{rq}\varphi^{tq}\,dx + \\ + n\bigl(2ct\max_\Omega|\nabla\varphi|\bigr)^q \int_\Omega \nu\varphi^{(t-1)q}[1 + h_s^2(u)]^{rq}\,dx.$$

Лемма 3.2. *Пусть $u \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ in Ω. Пусть $q_1 \in (q,\tilde q)$, $s \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $t > 1$. Пусть $\nu\varphi^{t-1} \in L^{q_1/(q_1-q)}(\Omega)$ и $w = u[1 + h_s^2(u)]^r\varphi^t$. Тогда $\nu|u|^q\varphi^{(t-1)q} \in L^1(\Omega)$, $w \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и выполняется неравенство*

$$\Bigl(\int_\Omega |w|^{\tilde q}\,dx\Bigr)^{q/\tilde q} \leqslant (2c)^q(1 + 4c'r)^q \int_\Omega \Bigl\{\sum_{|\alpha|=1} \nu|D^\alpha u|^q\Bigr\}[1 + h_s^2(u)]^{rq}\varphi^{tq}\,dx + \\ + n\bigl(2ct\max_\Omega|\nabla\varphi|\bigr)^q \int_\Omega \nu|u|^q\varphi^{(t-1)q}[1 + h_s^2(u)]^{rq}\,dx.$$

Доказательство лемм 3.1 и 3.2 не вызывает серьёзных затруднений. Оно основано на использовании гладких аппроксимаций функции u, неравенствах (3.3), (3.5), (3.7) и предположении 2.1.

Лемма 3.3. *Пусть $q_1 \in (q,\tilde q)$, $\tau > \tilde q/(\tilde q - q_1)$ и $\psi \in L^\tau(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$ в Ω. Пусть Ω_0 — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0 \subset \Omega$ и сужение функции $\nu^{q_1/(q_1-q)}$ на Ω_0 принадлежит пространству $L^\tau(\Omega_0)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ в Ω, $\operatorname{meas}\{\varphi = 1\} > 0$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$. Пусть $m_0, m_1, m_2 > 0$, $q_0 \in (q_1,\tilde q)$, $u \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$,*

$$\int_\Omega |u|^{q_0}\,dx \leqslant m_0, \tag{3.9}$$

и пусть для каждых $s \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $t > q$ выполнено неравенство

$$\int_\Omega \Bigl\{\sum_{|\alpha|=1} \nu|D^\alpha u|^q\Bigr\}[1 + h_s^2(u)]^r\varphi^t\,dx \leqslant \\ \leqslant m_1(r+t)^{m_2} \int_\Omega [\psi + |u|^{q_1}]\,[1 + h_s^2(u)]^r\varphi^{t-q}\,dx. \tag{3.10}$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\{\varphi=1\}}|u|\leqslant M, \tag{3.11}$$

где M — положительная константа, зависящая только от n, c, c', q, $\tilde{q}$, q_1, q_0, τ, m_0, m_1, m_2, $\operatorname{meas}\Omega$, $\max\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|$, $\|\psi\|_{L^\tau(\Omega)}$ и нормы сужения функции $\nu^{q_1/(q_1-q)}$ на Ω_0 в $L^\tau(\Omega_0)$.

Доказательство. Пусть $\nu_1\colon\Omega\to\mathbb{R}$ — такая функция, что $\nu_1=\nu$ в Ω_0 и $\nu_1=0$ в $\Omega\setminus\Omega_0$. Ясно, что $\nu_1^{q_1/(q_1-q)}\in L^\tau(\Omega)$.

Положим

$$\psi_1=1+\psi+\nu_1^{q_1/(q_1-q)},\quad \tau_1=\frac{(\tau-1)\tilde{q}}{\tau},\quad \theta=\frac{\tau_1}{q}.$$

Поскольку $\tau>\tilde{q}/(\tilde{q}-q_1)$, имеем $\tau_1>q_1$ и, следовательно, $\theta>1$.

Положим также

$$b=\min\left\{\frac{q_0(\tau-1)}{2\tau},\ \frac{q_0-q_1}{2}\right\}$$

и для каждого $j\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ определим

$$r_j=b\theta^j,\quad t_j=\frac{q\theta(2\theta^j-1)}{\theta-1}. \tag{3.12}$$

Через m_i, $i=3,4,\ldots$, обозначим положительные константы, зависящие только от параметров, указанных в заключительной части утверждения леммы. Легко проверить, что

$$\|\psi_1\|_{L^\tau(\Omega)}\leqslant m_3. \tag{3.13}$$

Фиксируя произвольное $s\in\mathbb{N}$, для каждого $j\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ определим

$$I_j=\int\limits_{\Omega}[\psi_1+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_j}\varphi^{t_j}\,dx. \tag{3.14}$$

Принимая во внимание, что $r_0=b$, $2b\tau/(\tau-1)\leqslant q_0$, $q_1+2b\leqslant q_0$, и используя неравенство Гёльдера и (3.13), (3.6), (3.9), из (3.14) получим

$$\begin{aligned} I_0 &\leqslant \int\limits_{\Omega}[\psi_1+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{b}\,dx\leqslant \\ &\leqslant m_3\biggl(\int\limits_{\Omega}[1+h_s^2(u)]^{b\tau/(\tau-1)}\,dx\biggr)^{(\tau-1)/\tau}+\int\limits_{\Omega}|u|^{q_1}[1+h_s^2(u)]^{b}\,dx\leqslant \\ &\leqslant m_3\biggl(\int\limits_{\Omega}[1+2|u|]^{q_0}\,dx\biggr)^{(\tau-1)/\tau}+\int\limits_{\Omega}[1+2|u|]^{q_0}\,dx\leqslant m_4. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Пусть теперь $j\in\mathbb{N}$. Из (3.12) следует, что

$$\frac{r_j}{\theta}=r_{j-1},\quad \frac{t_j}{\theta}-q=t_{j-1}. \tag{3.16}$$

Из этих соотношений и (3.10) получим

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|=1}\nu|D^\alpha u|^q\Big\}[1+h_s^2(u)]^{r_j/\theta}\varphi^{t_j/\theta}\,dx \leqslant \\ \leqslant m_1(r_j+t_j)^{m_2}\int\limits_{\Omega}[\psi+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx. \quad (3.17)$$

Положим

$$v_j=[1+h_s^2(u)]^{r_j/\tau_1}\varphi^{t_j/\tau_1}, \quad w_j=u[1+h_s^2(u)]^{r_j/\tau_1}\varphi^{t_j/\tau_1}.$$

Используя неравенства Юнга и Гёльдера и (3.13), из (3.14) получаем

$$I_j\leqslant\int\limits_{\Omega}[\psi_1+1+|u|^{\tau_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_j}\varphi^{t_j}\,dx\leqslant \\ \leqslant 2\int\limits_{\Omega}\psi_1[1+h_s^2(u)]^{r_j}\varphi^{t_j}\,dx+\int\limits_{\Omega}|u|^{\tau_1}[1+h_s^2(u)]^{r_j}\varphi^{t_j}\,dx\leqslant \\ \leqslant 2m_3\Big(\int\limits_{\Omega}v_j^{\tilde q}\,dx\Big)^{(\tau-1)/\tau}+\int\limits_{\Omega}|w_j|^{\tau_1}\,dx.$$

Следовательно,

$$I_j\leqslant 2m_3\Big(\int\limits_{\Omega}v_j^{\tilde q}\,dx\Big)^{\theta q/\tilde q}+(1+\operatorname{meas}\Omega)\Big(\int\limits_{\Omega}|w_j|^{\tilde q}\,dx\Big)^{\theta q/\tilde q}. \quad (3.18)$$

Используя лемму 3.1, (3.16), (3.17) и (3.14), устанавливаем, что

$$\Big(\int\limits_{\Omega}v_j^{\tilde q}\,dx\Big)^{q/\tilde q}\leqslant m_5r_j^q\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|=1}\nu|D^\alpha u|^q\Big\}[1+h_s^2(u)]^{r_j/\theta}\varphi^{t_j/\theta}\,dx+ \\ +m_6t_j^q\int\limits_{\Omega}\nu_1[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx\leqslant \\ \leqslant m_1m_5r_j^q(r_j+t_j)^{m_2}\int\limits_{\Omega}[\psi+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx+ \\ +m_6t_j^q\int\limits_{\Omega}[1+\nu_1^{q_1/(q_1-q)}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx\leqslant \\ \leqslant m_7(r_j+t_j)^{q+m_2}I_{j-1}. \quad (3.19)$$

Аналогично, используя лемму 3.2, (3.16), (3.17) и (3.14), получаем, что

$$\Big(\int\limits_{\Omega}|w_j|^{\tilde q}\,dx\Big)^{q/\tilde q}\leqslant m_8(1+r_j)^q\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|=1}\nu|D^\alpha u|^q\Big\}[1+h_s^2(u)]^{r_j/\theta}\varphi^{t_j/\theta}\,dx+$$
$$+\,m_9t_j^q\int\limits_{\Omega}\nu_1|u|^q[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant m_1m_8(r_j+t_j)^{q+m_2}\int\limits_{\Omega}[\psi+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx+$$
$$+\,m_9t_j^q\int\limits_{\Omega}[\nu_1^{q_1/(q_1-q)}+|u|^{q_1}]\,[1+h_s^2(u)]^{r_{j-1}}\varphi^{t_{j-1}}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant m_{10}(r_j+t_j)^{q+m_2}I_{j-1}. \tag{3.20}$$

Из (3.18)—(3.20) и (3.12) заключаем, что для каждого $j\in\mathbb N$

$$I_j\leqslant m_{11}\theta^{jm_{12}}I_{j-1}^{\theta}.$$

Используя это рекуррентное соотношение и (3.15), устанавливаем, что для каждого $j\in\mathbb N$

$$I_j\leqslant m_{13}^{\theta^j}.$$

Это неравенство и (3.14) влекут, что для каждых $j,s\in\mathbb N$

$$\int\limits_{\Omega}|u|^{q_1}[1+h_s^2(u)]^{r_j}\varphi^{t_j}\,dx\leqslant m_{13}^{\theta^j}.$$

Следовательно, принимая во внимание, что $h_s(u)\to u$ в Ω, и используя лемму Фату, получим, что для каждого $j\in\mathbb N$

$$\int\limits_{\{\varphi=1\}}|u|^{q_1+2r_j}\,dx\leqslant m_{14}^{q_1+2r_j}.$$

Следовательно, неравенство (3.11) выполнено. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть* $\mu^{q/(q-2p)}(1/\nu)^{2p/(q-2p)}\in L^1(\Omega)$, $u\in\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ *и* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi\geqslant 0$ *в* Ω. *Пусть* $q_1\in(q,\tilde q)$, $s\in\mathbb N$, $r>0$ *и* $t>2$. *Пусть* $\nu\varphi^{t-2}\in L^{q_1/(q_1-q)}(\Omega)$ *и*

$$w=u[1+h_s^2(u)]^r\varphi^t,\quad z=[1+h_s^2(u)]^r+2r[1+h_s^2(u)]^{r-1}h_s(u)h_s'(u)u.$$

Тогда $w\in\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu,\mu,\Omega)$ *и справедливы следующие утверждения*:

1) *для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha|=1$,*

$$D^\alpha w=z\varphi^tD^\alpha u+tu[1+h_s^2(u)]^r\varphi^{t-1}D^\alpha\varphi\quad\text{п. в. в }\ \Omega;$$

2) *для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha|=2$,*

$$|D^\alpha w - z\varphi^t D^\alpha u| \leqslant 20(c'')^2(t+r)^2[1+h_s^2(u)]^r \varphi^t \Big\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \Big\} +$$
$$+ 4c'(t+r)^2(1+|u|)[1+h_s^2(u)]^r \times$$
$$\times \Big\{ \varphi^{t-1}|D^\alpha \varphi| + \varphi^{t-2} \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \varphi|^2 \Big\} \quad \textit{п. в. в } \ \Omega.$$

Доказательство леммы основывается на использовании гладких аппроксимаций для функции u, неравенствах (3.3), (3.5), (3.7), (3.8) и предположении 2.1.

4. Задача Дирихле и её разрешимость

Будем использовать следующие обозначения: Λ — множество всех n-мерных мультииндексов α, таких что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$; $\mathbb{R}^{n,2}$ — пространство всех множеств $\xi = \{\xi_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ вещественных чисел; если функция $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ имеет слабые производные $D^\alpha u$, $\alpha \in \Lambda$, то $\nabla_2 u = \{D^\alpha u \colon \alpha \in \Lambda\}$.

Пусть c_1, c_2 — положительные константы, g_1, g_2 — неотрицательные функции на Ω, такие что $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $A_\alpha \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, определённая для каждого $\alpha \in \Lambda$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и каждого $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ выполнены следующие неравенства:

$$\sum_{|\alpha|=1} [\nu(x)]^{-1/(q-1)} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} [\mu(x)]^{-1/(p-1)} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} \nu(x)|\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} \mu(x)|\xi_\alpha|^p \Big\} + g_1(x), \tag{4.1}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_2 \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} \nu(x)|\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} \mu(x)|\xi_\alpha|^p \Big\} - g_2(x). \tag{4.2}$$

Более того, предположим, что для почти каждого $x \in \Omega$ и каждых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} [A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0. \tag{4.3}$$

Пусть $F \colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, такая что

а) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x,\cdot)$ невозрастающая в $\mathbb{R}$;

б) для каждого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot,s)$ принадлежит классу $L^1(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = F(x,u) \ \text{ в } \ \Omega, \\ &D^\alpha u = 0, \ |\alpha| = 0,1, \ \text{ на } \ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{P}$$

Определение 4.1. W-решение задачи (P) — это функция $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$, такая что

1) $F(x,u) \in L^1(\Omega)$;
2) для каждого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x,\nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$;
3) для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u) D^\alpha \varphi \Big\} dx = \int\limits_\Omega F(x,u)\varphi\, dx.$$

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены следующие условия*:
1) $\tilde q > q/(q-1)(p-1)$;
2) $\mu^{q/(q-2p)}(1/\nu)^{2p/(q-2p)} \in L^1(\Omega)$;
3) *существует вещественное число* $r_1 > \tilde q/(\tilde q - q)$, *такое что* $\nu \in L^{r_1}(\Omega)$;
4) *существует вещественное число* $r_2 > \tilde q(q-1)/[\tilde q(q-1)(p-1) - q]$, *такое что* $1/\mu \in L^{r_2}(\Omega)$.

Тогда существует W*-решение задачи* (P).

Этот результат был получен в [8].

5. Основной результат

В этом разделе, используя рассмотрения работы [8] и леммы 3.3 и 3.4, мы докажем главный результат настоящей статьи. В нём утверждается существование W-решений задачи (P), ограниченных на тех множествах, в которых поведение функций ν, μ, g_1, g_2 и $F(\cdot,0)$ достаточно регулярно.

Теорема 5.1. *Предположим, что все условия теоремы 4.2 выполнены и* $q < \tilde q(q-1)/q$. *Пусть* $q_1 \in (q, \tilde q(q-1)/q)$, $\tau > \tilde q/(\tilde q - q_1)$, *и пусть* Ω_1 — *непустое открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *такое что* $\Omega_1 \subset \Omega$. *Пусть для каждого непустого замкнутого множества* G *в* $\mathbb{R}^n$, *такого что* $G \subset \Omega_1$, *сужения функций* $\nu^{q_1/(q_1-q)}$, $\mu^{q/(q-2p)}(1/\nu)^{2p/(q-2p)}$, g_1, g_2 *и* $|F(\cdot,0)|^{q_1/(q_1-1)}$ *на* G *принадлежат классу* $L^\tau(G)$. *Тогда существует* W*-решение* u *задачи* (P), *такое что для каждого замкнутого множества* G *в* $\mathbb{R}^n$, *обладающего свойствами* $G \subset \Omega_1$ *и* $\operatorname{meas} G > 0$ *справедливо неравенство* $\operatorname{vrai}\max\limits_G |u| < +\infty$.

Доказательство. Для каждого $l \in \mathbb{N}$ определим функцию $F_l\colon \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$F_l(x,s) = \max\{\min\{F(x,0) - F(x,s),\, l\},\, -l\}$$

и функцию $f_l\colon \Omega \to \mathbb{R}$ равенством

$$f_l(x) = \begin{cases} F(x,0), & \text{если } |F(x,0)| \leqslant l,\\ 0, & \text{если } |F(x,0)| > l. \end{cases}$$

Поскольку в силу свойства б) функции F выполнено включение $F(\cdot,0) \in L^1(\Omega)$, получаем

$$\lim_{l\to\infty} \|f_l - F(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Более того, из определения функции f_l вытекает, что для каждого $l \in \mathbb{N}$

$$\|f_l\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|F(\cdot, 0)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Используя неравенства (4.1)—(4.3), свойство a) функции F, гипотезу 2.1 и известные результаты теории монотонных операторов (см., например, [9]), получим, что если $l \in \mathbb{N}$, то существует такая функция $u_l \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu, \mu, \Omega)$, что для каждой функции $v \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu, \mu, \Omega)$

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha v + F_l(x, u_l) v \biggr\} dx = \int\limits_\Omega f_l v \, dx. \tag{5.1}$$

Из рассмотрений раздела 3 работы [8] вытекает, что существуют W-решение u задачи (P) и возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$, такие что

$$u_{l_i} \to u \quad \text{п. в. в} \quad \Omega. \tag{5.2}$$

Кроме того, для произвольных $k, l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\operatorname{meas}\{|u_l| \geqslant k\} \leqslant c_3 k^{-\tilde{q}(q-1)/q}, \tag{5.3}$$

где c_3 — положительная константа, зависящая только от n, p, q, $\tilde{q}$, c, c_1, c_2 и норм в $L^1(\Omega)$ функций $\mu^{q/(q-2p)}(1/\nu)^{2p/(q-2p)}$, g_1, g_2 и $F(\cdot, 0)$.

Фиксируем $q_0 \in (q_1, \tilde{q}(q-1)/q)$. Из (5.3) и [1, лемма 2.6] следует, что для каждого $l \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_\Omega |u_l|^{q_0} \, dx \leqslant c_4, \tag{5.4}$$

где c_4 — положительная константа, зависящая только от q, $\tilde{q}$, q_0, c_3 и $\operatorname{meas}\Omega$.

Пусть G — произвольное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ со свойствами $G \subset \Omega_1$ и $\operatorname{meas} G > 0$. Положим $\rho = \operatorname{dist}(G, \partial\Omega_1)$ и

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, G) < \rho/2\}.$$

Ясно, что $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$. Пусть $\chi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — индикаторная (характеристическая) функция множества Ω_0. Положим

$$\psi = \biggl(\nu^{q_1/(q_1-q)} + \mu^{q/(q-2p)} \Bigl(\frac{1}{\nu}\Bigr)^{2p/(q-2p)} + g_1 + g_2 + |F(\cdot, 0)|^{q_1/(q_1-1)}\biggr)\chi.$$

Из условий теоремы следует, что $\psi \in L^\tau(\Omega)$ и сужение функции $\nu^{q_1/(q_1-q)}$ на Ω_0 принадлежит пространству $L^\tau(\Omega_0)$.

Фиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, такую что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ на Ω, $\varphi = 1$ на G, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$, и полагаем

$$m(\varphi) = 1 + \max_\Omega \biggl\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \varphi|^2 + \sum_{|\beta|=2} |D^\beta \varphi| \biggr\}.$$

Фиксируем также $l \in \mathbb{N}$ и полагаем

$$\Phi_l = \sum_{|\alpha|=1} \nu |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} \mu |D^\alpha u_l|^p.$$

Наша цель — доказать неравенства вида (3.10) для функции u_l и затем применить лемму 3.3.

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $t > q$. Положим

$$w_l = u_l[1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t, \quad z_l = [1 + h_s^2(u_l)]^r + 2r[1 + h_s^2(u_l)]^{r-1} h_s(u_l) h_s'(u_l) u_l.$$

По лемме 3.4 $w_l \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\nu, \mu, \Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

1) для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha w_l = z_l \varphi^t D^\alpha u_l + t u_l [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-1} D^\alpha \varphi \quad \text{п. в. в} \quad \Omega;$$

2) для каждого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$,

$$|D^\alpha w_l - z_l \varphi^t D^\alpha u_l| \leqslant 20(c'')^2 (t + r)^2 [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t \biggl\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\alpha u_l|^2 \biggr\} + \\ + 4c' m(\varphi)(t + r)^2 (1 + |u_l|)[1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-2} \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

По (5.1) получаем

$$\int_\Omega \biggl\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha w_l + F_l(x, u_l) w_l \biggr\} dx = \int_\Omega f_l w_l \, dx. \tag{5.5}$$

Положим

$$I' = \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)| \, |D^\alpha w_l - z_l \varphi^t D^\alpha u_l| \, dx,$$

$$I'' = \sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)| \, |D^\alpha w_l - z_l \varphi^t D^\alpha u_l| \, dx.$$

Принимая во внимание свойство a) функции F, из (5.5) получаем, что

$$\int_\Omega \biggl\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha u_l \biggr\} z_l \varphi^t \, dx \leqslant \int_\Omega |f_l| \, |w_l| \, dx + I' + I''.$$

Следовательно, используя (4.2), определения функций f_l, w_l, z_l и свойства функции h_s, имеем

$$c_2 \int_\Omega \Phi_l [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t \, dx \leqslant (1 + 4c'r) \int_\Omega [\psi + |u_l|^{q_1}] \, [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t \, dx + I' + I''. \tag{5.6}$$

Оценим I' и I''. Используя свойство 1), неравенство Юнга и (4.1), получаем

$$I' \leqslant \frac{c_2}{3} \int_\Omega \Phi_l [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t \, dx + \\ + \frac{c_2}{3c_1} [1 + (3nc_1/c_2)^q] \, [tm(\varphi)]^q \int_\Omega [\psi + |u_l|^{q_1}] \, [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-q} \, dx. \tag{5.7}$$

Далее, полагаем $p_1 = qp/(q-2p)$. Ясно, что

$$\frac{p-1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{1}{p_1} = 1. \tag{5.8}$$

Пусть α — произвольный n-мерный мультииндекс, такой что $|\alpha| = 2$. По свойству 2) имеем

$$\begin{aligned} &|A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|\,|D^\alpha w_l - z_l\varphi^t D^\alpha u_l| \leqslant \\ &\quad\leqslant 20(c'')^2(t+r)^2|A_\alpha(x,\nabla_2 u_l)|\biggl\{\sum_{|\beta|=1}|D^\beta u_l|^2\biggr\}[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t + \\ &\quad + 4c'm(\varphi)(t+r)^2|A_\alpha(x,\nabla_2 u_l)|(1+|u_l|)[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^{t-2} \quad \text{п. в. в } \Omega. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Обозначим через J'_α и J''_α соответственно первое и второе слагаемое правой части (5.9) и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Используя (5.8) и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} J'_\alpha &= \varepsilon^{(p-1)/p}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/p}|A_\alpha(x,\nabla_2 u_l)|\varepsilon^{2/q}\nu^{2/q}\biggl\{\sum_{|\beta|=1}|D^\beta u_l|^2\biggr\} \times \\ &\times 20(c'')^2(t+r)^2\varepsilon^{-1+1/p_1}\mu^{1/p}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2/q}[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t \leqslant \\ &\leqslant \biggl\{\varepsilon\left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/(p-1)}|A_\alpha(x,\nabla_2 u_l)|^{p/(p-1)} + \varepsilon\nu\biggl(\sum_{|\beta|=1}|D^\beta u_l|^2\biggr)^{q/2} + \\ &+ [5c''(t+r)]^{2p_1}\varepsilon^{1-p_1}\mu^{p_1/p}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2p_1/q}\biggr\}[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} J'_\alpha &\leqslant \varepsilon(c_1+n^q)\Phi_l[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t + \\ &\quad + [\varepsilon + (5c''(t+r))^{2p_1}\varepsilon^{1-p_1}]\psi[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t \quad \text{п. в. в } \Omega. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Аналогично с помощью неравенства Юнга с показателями $p/(p-1)$ и p и (4.1) находим, что

$$\begin{aligned} J''_\alpha &\leqslant c_1\varepsilon\Phi_l[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^t + \\ &\quad + \varepsilon(1+\varepsilon^{-p})[4c'm(\varphi)(t+r)^2]^p[g_1+\mu(1+|u_l|)^p]\,[1+h_s^2(u_l)]^r\varphi^{t-2p} \quad \text{п. в. в } \Omega. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \mu(1+|u_l|)^p &= \mu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2p/q}\nu^{2p/q}(1+|u_l|)^p \leqslant \mu^{q/(q-2p)}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2p/(q-2p)} + \nu(1+|u_l|)^q \leqslant \\ &\leqslant \mu^{q/(q-2p)}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2p/(q-2p)} + \nu^{q_1/(q_1-q)} + (1+|u_l|)^{q_1}. \end{aligned}$$

Значит,

$$[g_1 + \mu(1 + |u_l|)^p]\varphi^{t-2p} \leqslant 2^{q_1-1}[\psi + 1 + |u_l|^{q_1}]\varphi^{t-q}.$$

Принимая в расчёт это неравенство, из (5.9)—(5.11) находим, что

$$\int\limits_\Omega |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|\, |D^\alpha w_l - z_l \varphi^t D^\alpha u_l|\, dx \leqslant (2c_1 + n^q)\varepsilon \int\limits_\Omega \Phi_l [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t\, dx +$$

$$+ 2^{q_1}(5c'')^{2p_1}\varepsilon(1 + \varepsilon^{-p_1})[m(\varphi)]^p (t + r)^{2p_1} \int\limits_\Omega [\psi + 1 + |u_l|^{q_1}]\, [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-q}\, dx.$$

Следовательно, полагая $\varepsilon = c_2/[3n^2(2c_1 + n^q)]$ и суммируя по всем n-мерный мультииндексам α длины 2, имеем

$$I'' \leqslant \frac{c_2}{3} \int\limits_\Omega \Phi_l [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t\, dx + 2^{q_1}(5c'')^{2p_1} c_2 \left[1 + \left(\frac{3n^2(2c_1 + n^q)}{c_2}\right)^{p_1}\right] [m(\varphi)]^p \times$$

$$\times (t + r)^{2p_1} \int\limits_\Omega [\psi + 1 + |u_l|^{q_1}]\, [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-q}\, dx. \quad (5.12)$$

Из (5.6), (5.7) и (5.12) получаем неравенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} \nu |D^\alpha u_l|^q \right\} [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^t\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5 (r + t)^{q+2p_1} \int\limits_\Omega [\psi + 1 + |u_l|^{q_1}]\, [1 + h_s^2(u_l)]^r \varphi^{t-q}\, dx$$

с положительной константой c_5, зависящей только от n, p, q, c'', c_1, c_2, q_1 и $m(\varphi)$.

Следовательно, принимая во внимание (5.4) и применяя лемму 3.3, находим, что существует положительная константа M, такая что для каждого $l \in \mathbb{N}$ выполняется $\operatorname{vrai}\max\limits_G |u_l| \leqslant M$. Из этого неравенства и (5.2) следует, что $\operatorname{vrai}\max\limits_G |u| \leqslant M$. Доказательство закончено. □

6. Пример

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < 1\}$, $2 < p < n/2$, $\max(2p, \sqrt{n}) < q < n$, $0 < r < \min(1 - n/q^2, 3/4)$, и пусть $\nu, \mu \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — такие положительные функции, что для каждого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$\nu(x) = |x|^{qr}, \quad \mu(x) = |x|^{2pr}.$$

Пусть $\sigma > 1$, $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 \in (0, 1)$, и пусть $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — такая функция, что для каждого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$f(x) = |x|^{-n} \left(\ln \frac{e}{|x|}\right)^{-\gamma_1} + (1 - |x|)^{-\gamma_2}.$$

Отметим, что $f \in L^1(\Omega)$ и для каждого $\gamma > 1$ справедливо $f \notin L^\gamma(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$- \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha \Big[\nu \Big(\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \Big)^{(q-2)/2} D^\alpha u\Big] +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \Big[\mu \Big(\sum_{|\beta|=2} |D^\beta u|^2 \Big)^{(p-2)/2} D^\alpha u\Big] = -|u|^{\sigma-1}u + f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad (6.1)$$

$$D^\alpha u = 0, \ |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \qquad (6.2)$$

Применяя теорему 5.1, устанавливаем, что существует W-решение u задачи (6.1), (6.2), такое что для каждого замкнутого подмножества G в $\mathbb{R}^n$ со свойствами $G \subset \Omega \setminus \{0\}$ и $\operatorname{meas} G > 0$ выполнено неравенство $\operatorname{vrai}\max_G |u| < +\infty$.

Литература

[1] Ковалевский А. А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвёртого порядка с L^1-правыми частями // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 2. — С. 27—80.

[2] Скрыпник И. В. Квазилинейные эллиптические уравнения высшего порядка с непрерывными обобщёнными решениями // Дифференц. уравн. — 1978. — Т. 14. — С. 786—795.

[3] Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1995. — Vol. 22. — P. 241—273.

[4] Kovalevsky A., Nicolosi F. Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Appl. Anal. — 1997. — Vol. 65. — P. 225—249.

[5] Kovalevsky A., Nicolosi F. On Hölder continuity of solutions of equations and variational inequalities with degenerate nonlinear high order operators // Problemi attuali dell'analisi e della fisica matematica. Atti del 2^0 Simp. Int. dedicato alla memoria del Prof. Gaetano Fichera. — Roma: Aracne Editrice, 2000. — P. 205—220.

[6] Kovalevsky A., Nicolosi F. Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1-data // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2001. — Vol. 47. — P. 435—446.

[7] Kovalevsky A., Nicolosi F. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth-order equations with L^1-right-hand sides // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2002. — Vol. 50. — P. 581—619.

[8] Kovalevsky A., Nicolosi F. Existence of solutions of some degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data // Appl. Anal. — 2002. — Vol. 81. — P. 905—914.

[9] Lions J. L. Quelques méthods de résolution des problèmes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[10] Nicolosi F., Skrypnik I. V. Nirenberg—Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1996. — Vol. 7. — P. 327—347.