ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины. 2005. Вып. 10

УДК 517.5

©2005. **Е.А. Севостьянов**

О ТЕОРЕМАХ СХОДИМОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИНЫ

Работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в многочисленных работах ведущих специалистов по теории отображений, см., напр., [1]-[10].

1. Введение. Здесь доказывается ряд теорем сходимости для отображений с конечным искажением длины, которые ранее доказывались для отображений с ограниченным искажением в работе [19]. Отображения с конечным искажением длины были введены в работе [15]. Они представляют собой значительно более широкий класс отображений, чем непостоянные квазирегулярные отображения. Например, любой гомеоморфизм $f \in W^{1,n}_{loc}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$ является отображением с конечным искажением длины, см. Теорему 4.6 в работе [15]. В частности, если $f \in W^{1,n}_{loc}$ и внутренняя дилатация локально интегрируема, то $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$ и, следовательно, f – отображение конечного искажения длины, см. [15]. Напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$. Положим

$$L\,(x,\varphi)\,=\,\limsup_{y\to x,\,y\,\in\,E}\,\frac{|\varphi\,(x)-\varphi\,(y)\,|}{|y-x|}\,,$$

$$l\,(x,\varphi)\,=\,\liminf_{y\to x,\,y\,\in\,E}\,\frac{|\varphi\,(x)-\varphi\,(y)\,|}{|y-x|}\,.$$

Непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n, n \geq 2$, называется отображением с **конечным метрическим искажением,** $f \in FMD$, если f обладает $(N)-$свойством Лузина и для п.в. $x \in D$

$$0\,<\,l\,(x,f)\,\leq\,L\,(x,f)\,<\,\infty\,.$$

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ между измеримыми пространствами (X,Σ,μ) и (X',Σ',μ') обладает **(N) – свойством,** если $\mu'\,(f\,(S))\,=\,0$ как только $\mu\,(S)\,=\,0$. Аналогично, f имеет $\mathbf{(N)}^{-1}$ **– свойство**, если $\mu\,(S)\,=\,0$ как только $\mu'\,(f\,(S))\,=\,0$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых Γ в области D, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)\ \ |dx|\geq 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in adm\,\Gamma$. **Модуль** семейства Γ есть величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in adm\,\Gamma}\int\limits_{D}\rho^n(x)\ \ dm(x)\,.$$

Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является $Q-$, если

$$M(f\Gamma) \le \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \ \ dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\Gamma$.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}-$ открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n-$локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma \mid_{[t_0, t]}$ кривой γ, если $t > t_0$ и $-l\left(\gamma \mid_{[t_0, t]}\right)$ если $t < t_0, t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n-$непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$, такая, что

$$L_{\gamma, g}\left(l_\gamma\left(t\right)\right) = l_{\widetilde{\gamma}}\left(t\right) \quad \forall\ t \in \Delta\ .$$

Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает $L-$**свойством**, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma, f}$ обладает $N-$свойством;

(L_2) для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f\left(D\right)$ каждое **поднятие** γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ обладает $N^{-1}-$свойством.

Кривая $\gamma \in D$ называется **поднятием кривой** $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ **при отображении** $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n, n \ge 2$, является **отображением с конечным искажением длины**, $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает $L-$свойством.

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п.в.), пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| \ = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$$

– **матричная норма** $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l\left(f'(x)\right) \ = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}\ .$$

Напомним, что **внешняя дилатация** отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) \ = \ \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}\ ,$$

если $J(x, f) \ne 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) \ = \ \frac{|J(x, f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}\ ,$$

если $J(x, f) \ne 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Максимальная дилатация определяется как

$$K(x,f) \;=\; \max\{K_0(x,f), K_I(x,f)\}\,.$$

2. О поточечной полунепрерывности дилатаций.

Теорема 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $f_m:D\to\mathbb{R}^n-$ последовательность гомеоморфизмов конечного искажения длины, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Если

$$K_I(x,f_m) \;\leq\; Q(x) \,\in L^1_{loc}\,, \tag{1}$$

то $f-$ либо гомеоморфизм, либо $f\equiv const$ в D.

Замечание 1. Поскольку $K_I(x,g)\leq K_0^{n-1}(x,g)$, то вместо (1) для заключения Теоремы 1 достаточно потребовать,чтобы $K_0(x,f_m)\;\leq\; K(x)\;\in\; L^{n-1}_{loc}$. Поскольку, согласно Теореме 6.10 работы [15], любой FLD гомеоморфизм f является $Q-$гомеоморфизмом с $Q(x)\;=\;K_I(x,f)$, то доказательство Теоремы 1 сводится к следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $f_m:D\to\mathbb{R}^n$, $-$ последовательность $Q-$гомеоморфизмов с $Q\;\in\;L^1_{loc}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо $f-$ гомеоморфизм в D, либо $f\equiv const$ в D.

Доказательство Леммы 1. Как локально равномерный предел непрерывных отображений f_m, отображение f непрерывно. Пусть f не тождественно постоянна в D.

Покажем сначала, что f – дискретное отображение. Предположим противное. Тогда найдётся точка $x_0\in D$ и последовательность $x_k\in D$, $x_k\neq x_0$, $k=1,2\ldots$, такая, что $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$ с $f(x_k)=f(x_0)$. Заметим, что множество $E_0=\{x\in D: f(x)=f(x_0)\}$ замкнуто в D по непрерывности f и не совпадает с D, т.к. $f\not\equiv const$. Поэтому x_0 можно заменить неизолированной граничной точкой E_0.

Без ограничения общности рассуждений, можно считать, что $x_0=0$, $f_m(0)=f(0)=0$, $\overline{\mathbb{B}^n}\subset D$ и, кроме того, найдётся хотя бы одна точка $y_0\in\mathbb{B}^n$, где $f(y_0)\neq 0$. В силу непрерывности хордальной метрики,

$$h\left(f_m\left(y_0\right),0\right)\geq \delta_0/2\,,\qquad m\geq M, \tag{2}$$

где $\delta_0=h(f(y_0),0)>0$. Т.к. $\overline{\mathbb{B}^n}-$компакт в D, $f_m\to f$ равномерно в $\overline{\mathbb{B}^n}$, мы имеем для больших m неравенство

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash f_m\left(\mathbb{B}^n\right)\right)\geq \delta_*/2\,, \tag{3}$$

где $\delta_*\;=\;h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash f\left(\overline{\mathbb{B}^n}\right)\right)$. Пусть $\delta_0\;=\;\min\,(\delta_0/2,\,\delta_*/2)$. Согласно Теореме 3.7 в [16] получаем, что для всех $x\in B(0,r)$ и $r=\min\{\frac{|y_0|}{2},1-|y_0|\}$

$$|f_m(x)|\;\geq\;\psi(|x|)\,,\quad m\geq M, \tag{4}$$

где ψ – строго возрастающая функция с $\psi(0)=0$, которая зависит только от $L-$нормы Q в $\mathbb{B}^n$, n и δ. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m\to\infty$, получаем

$$|f(x)|\;\geq\;\psi(|x|),\;\; x\in\; B\left(0,r\right)\,. \tag{5}$$

Но тогда, в частности,

$$0\;=\;|f(x_k)|\;\geq\;\psi(|x_k|),\quad\forall\; k\geq k_0,$$

т.е., $\psi(|x_k|)=0$ при всех $k\ge k_0$, что противоречит строгому возрастанию функции ψ. Полученное противоречие показывает, что f дискретно.

Покажем, что f инъективно в D. Предположим противное, а именно, что существуют $x_1,x_2\in D$, $x_1\ne x_2$, с $f(x_1)=f(x_2)$. Пусть $x_2\not\in\overline{B(x_1,t)}\subset D$ при $t\in(0,t_0]$. Тогда $f_m(\partial B(x_1,t))$ отделяет $f_m(x_1)$ от $f_m(x_2)$ и, следовательно,

$$h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))\;<\;h(f_m(x_1),f_m(x_2)\,. \tag{6}$$

Пусть расстояние $h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))$ достигается в точке $x_{m,t}\in\partial B(x_1,t)$, т.е., $h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))=h(f_m(x_1),f_m(x_{m,t}))$. Так как граница шара в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством, найдётся подпоследовательность $x_{m_k,t}\to x_t\in\partial B(x_1,t)$. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций в метрическом пространстве влечёт непрерывную сходимость, см. [17], Теорема 3, стр. 229, получаем, что $h(f_{m_k}(x_{m_k,t}),f(x_t))\to 0$ при $k\to\infty$. Таким образом, с учётом неравенства (6) имеем, что

$$h(f(x_1),f(x_t))\;\le\;h(f(x_1),f(x_2)).$$

Так как по предположению $h(f(x_1),f(x_2))=0$, то из последнего неравенства следует, что $f(x_t)=f(x_1)$, для всех $t\in(0,t_0]$, что противоречит дискретности отображения f. Непрерывность обратного отображения f^{-1} следует также из (4). Лемма 1 доказана. $\Box$

Ниже мы используем обозначение: $P_0(x,f):=(K_0(x,f))^{\frac{1}{n-1}}$.

Лемма 2. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, $f_j:D\to\mathbb{R}^n$, $j=1,2,\ldots,$ - последовательность гомеоморфизмов класса FLD в D, сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f:D\to\mathbb{R}^n$. Тогда в каждой точке x_0 дифференцируемости отображения f выполнено неравенство:

$$P_0(x_0,f)\;\le\;\liminf_{h\to 0}\liminf_{j\to\infty}\frac{1}{h^n}\int\limits_{C(x_0,h)}P_0(y,f_j)\,dy\;, \tag{7}$$

где $C(x_0,h)$ обозначает $n-$мерный куб с центром в точке x_0 и рёбрами с длиной h, ориентированными вдоль главных векторов квадратичной формы $(f'(x_0)z,f'(x_0)z)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x_0=0$, $f(0)=0$ и $f'(0)\ne 0$. Пусть $C(h)=C(0,h)$, $e_1,\ldots,e_n$ – главные векторы линейного отображения $f'(0)$, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – соответствующие им растяжения, $\lambda_1\le\lambda_2\ldots\le\lambda_n$. Т.к. $f'(0)\ne 0$, то $\lambda_n>0$. Далее,

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-f'(0)\cdot x|}{|x|}\;=\;0$$

и, следовательно, $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\;\;\forall\,h\in(0,\delta)\;\;\forall\,x\in C(h)$

$$|f(x)-f'(0)\cdot x|\;<\;h\varepsilon.$$

В силу локально-равномерной сходимости f_m к f имеем $\forall\,h\in(0,\delta)\;\forall\,x\in C(h)\;\;\forall\,j\ge j_0=j_0(h)$:

$$|f_j(x)-f'(0)\cdot x|\;<\;h\varepsilon. \tag{8}$$

Заметим,что $f'(0)C(h)=\prod\limits_{i=1}^{n}(-\frac{\lambda_ih}{2},\frac{\lambda_ih}{2})$ – прямоугольный параллелепипед, оси которого ориентированы вдоль векторов $\tilde{e_1},\ldots\tilde{e_n}$, где $\tilde{e_1},\ldots\tilde{e_n}$ – соответствующая ортогональная система векторов, включающая все векторы $\tilde{e_i}=\frac{f'(0)e_i}{|f'(0)e_i|}$ с ненулевыми $|f'(0)e_i|=$

$\lambda_i \neq 0$. Отсюда, в силу (8), получаем, что при $j \geq j_0 = j_0(h)$ все $f_j(y)$ лежат в прямоугольном параллелепипеде $\prod\limits_{i=1}^{n}(-(\frac{\lambda_i}{2}+\varepsilon)h, (\frac{\lambda_i}{2}+\varepsilon)h)$, оси которого ориентированы вдоль векторов $\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n}$. Таким образом, $mes\, f_j(C(h)) \leq h^n[|J(0,f)| + \Delta(\varepsilon)]$, где $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, по Предложению 3.7 в [15]

$$\int\limits_{C(h)} |J(y,f_j)|dy \ \leq \ h^n[|J(0,f)| + \Delta(\varepsilon)]\,. \tag{9}$$

Рассмотрим $(n-1)$ – мерный куб $C^*(h)$ с центром в нуле и длиной рёбра h, ориентированный вдоль векторов $e_1, \ldots, e_{n-1},$. Пусть $l(z)$ – отрезок прямой, проходящий через точку $z \in C^*(h)$, и параллельной вектору e_n, в пределах $C^*(h)$. Пусть $l_j(z)$ – длина кривой $f_j(l(z))$. Т.к. $f_j \in ACP$ по Предложению 4.3 в [15], мы имеем

$$l_j(z) = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f_j'(z,y_n)e_n|\ dy_n$$

при п.в. $z \in C^*(h)$ относительно $(n-1)$-мерной меры Лебега. С другой стороны, из (8) получаем, что

$$l_j(z) \ \geq \ \lambda_n h - 2h\varepsilon$$

при п.в. z. Поэтому

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f_j'(z,y_n)e_n|\ dy_n \ \geq \ \lambda_n h - 2h\varepsilon$$

при п.в. z. Интегрируя по $z \in C^*(h)$ и применяя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{C(h)} |{f_j}'(y)e_n|\ dy \geq \ h^n\left(\lambda_n - 2\varepsilon\right)\ . \tag{10}$$

Отметим, что $J(y,f_j) \neq 0$ п.в. в $C(h)$ по Предложению 3.7 в [15]. Таким образом, используя (9) и неравенство Гёльдера, получаем:

$$\int\limits_{C(h)} |{f_j}'(y)e_n|dy \ \leq \int\limits_{C(h)} \|{f_j}'(y)\|dy \ = \int\limits_{C(h)} K_0^{\frac{1}{n}}(y,f_j)|J^{\frac{1}{n}}(y,f_j)|\,dy \ \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{C(h)} K_0^{\frac{1}{n-1}}(y,f_j)dy\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int\limits_{C(h)} |J(y,f_j)|dy\right)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq \ h\left[|J(0,f)| + \Delta(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\int\limits_{C(h)} K_0^{\frac{1}{n-1}}(y,f_j)dy\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

и, следовательно, по (10)

$$\frac{(\lambda_n - 2\varepsilon)^{\frac{n}{n-1}}}{\{|J(0,f)| + \Delta(\varepsilon)\}^{\frac{1}{n-1}}} \le \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} K_0^{\frac{1}{n-1}}(y, f_j)\, dy\,. \tag{11}$$

Устремляя здесь сначала $j \to \infty$, затем $h \to 0$ и, наконец, $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$P(0,f) \le \liminf_{h\to 0} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} P(y, f_j)\; dy\,. \tag{12}$$

□

Применяя к (7) интегральное неравенство Иенсена к возрастающим выпуклым функциям $\Phi(t)$, приходим к следствию.

Следствие 1. В условиях Леммы 2 для любой возрастающей выпуклой функции $\Phi(t) : [1, +\infty] \to [0, +\infty]$ имеем соотношение

$$\Phi\left(P_0\left(x_0, f\right)\right) \le \liminf_{h\to 0} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,\, h)} \Phi\left(P_0\left(y, f_j\right)\right)\; dy\,. \tag{13}$$

В частности, для $\Phi(t) = t^{n-1}$ приходим к следующему заключению.

Следствие 2. В условиях Леммы 2 имеет место соотношение

$$K_0(x_0, f) \le \liminf_{h\to 0} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} K_0(y, f_j)\, dy\,. \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $f_m : D \to \mathbb{R}^n$ – последовательность гомеоморфизмов класса FLD, сходящаяся локально равномерно в D к FLD гомеоморфизму f. Если

$$K_0\left(x, f_m\right) \le K\left(x\right) \in L^1_{loc}\,,\; m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{15}$$

то

$$K_0\left(x, f\right) \le \limsup_{j\to\infty} K_0\left(x, f_j\right). \tag{16}$$

Доказательство. Применяя Следствие 2, теорему о почленном интегрировании, см. [12], стр. 50, получаем неравенство

$$K_0\left(x, f\right) \le \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \limsup_{j\to\infty} K_0(y, f_j)\, dy\,, \tag{18}$$

а применяя теорему о дифференцировании неопределённого интеграла Лебега, см. [12], с.180, по (15) имеем для п.в. $x \in D$ равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \limsup_{j\to\infty} K_0\left(y, f_j\right)\; dy = \limsup_{j\to\infty} K_0\left(x, f_j\right)\,. \tag{19}$$

Объединяя (18) и (19), получаем (16). □

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что (16) сохраняется, если вместо $f \in FLD$ потребовать, чтобы f было дифференцируемым п.в. в D. Необходимо также отметить, что в (16) верхний предел нельзя заменить на нижний предел даже для $K(x) \equiv const$.

Следствие 3. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f_m : D \to \mathbb{R}^n$ – последовательность гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{loc}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$, сходящаяся локально равномерно в D к гомеоморфизму f, который является дифференцируемым почти всюду в D. Если

$$K_0(x, f_m) \leq K(x) \in L^1_{loc}, \; m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

то

$$K_0(x, f) \leq \limsup_{j\to\infty} K_0(x, f_j). \tag{21}$$

3. О полунепрерывности дилатаций в среднем.

Теорема 3. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f_j : D \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots,$ - последовательность гомеоморфизмов класса FLD в D, сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму f с конечным искажением длины. Пусть $\Phi : [1, +\infty] \to [0, \infty]$ – произвольная выпуклая неубывающая функция и пусть при п.в. $x \in D$

$$P_0(x, f_j) \leq K(x), \tag{22}$$

где

$$\Phi(K(x)) \in L^1_{loc}. \tag{23}$$

Тогда для любого измеримого множества $E \subset D$ с $mes\, E < \infty$ имеет место соотношение:

$$\int\limits_E \Phi(P_0(x, f))\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_E \Phi(P_0(x, f_j))\, dx. \tag{24}$$

Доказательство. На основании Следствия 1 из (22) получаем, что $\Phi(P_0(x, f)) \leq \Phi(K(x))$ п.в. и из (23), что $\Phi(P_0(x, f)) \in L^1_{loc}(D)$. Следовательно, по теореме о дифференцируемости неопределённого интеграла, при п.в. $x \in D$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{C(x,h)} \Phi(P_0(y, f))\, dy = \Phi(P_0(x, f)). \tag{25}$$

Обозначим через E_0 множество тех $x \in D$, где либо f не дифференцируема, либо не имеет место соотношение (25). Заметим, что $mes\, E_0 = 0$.

Согласно Следствию 1,

$$\Phi(P_0(x, f)) \leq \liminf_{h\to 0} \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \Phi(P_0(y, f_j))\, dy, \quad \forall\, x \in D \backslash E_0.$$

Отсюда имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta' = \delta'(x, \varepsilon) : h < \delta'$

$$\Phi(P_0(x, f)) \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{C(x,h)} \Phi(P_0(y, f_j))\, dy + \varepsilon h^n, \tag{26}$$

и, учитывая (25),

$$\int\limits_{C(x,h)} \Phi\left(P_0(y,f)\right)\,dy \le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{C(x,h)} \Phi\left(P_0(y,f_j)\right)\,dy + \varepsilon h^n \tag{27}$$

для $h < \delta = \delta(x,\varepsilon)$. Пусть $\Omega \subset D$ – открытое множество. Система кубов $C(x,h)$: $x \in \Omega\backslash E_0$, образует покрытие Витали множества $\Omega\backslash E_0$, так что по теореме Витали о покрытии существует последовательность кубов $C_m = C(x_m,h_m) \subseteq \Omega$:

$$mes\left(\Omega\backslash\bigcup C_m\right) = 0\,.$$

Таким образом, по (27), получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(P_0(y,f)\right)\,dy \le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\left(P_0(y,f_j)\right)\,dy + \varepsilon\, mes\,\Omega\,, \tag{28}$$

и т.к. $\varepsilon > 0$ произвольно, то (24) доказано для произвольного открытого множества $\Omega \subset D$ с $mes\,\Omega < \infty$.

Пусть E – произвольное измеримое множество из D с $mes\,E < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\Omega = \Omega_\varepsilon \supseteq E$ с $mes\,(\Omega_\varepsilon\backslash E) < \varepsilon$, см. III (6.6) в [12]. Из неравенства (24) для Ω имеем, что

$$\int\limits_{E} \Phi\left(P_0(y,f)\right)\,dy \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(P_0(y,f)\right)\,dy \le$$

$$\le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Phi\left(P_0(y,f_j)\right)\,dy \le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{E} \Phi\left(P_0(y,f_j)\right)\,dy + \int\limits_{\Omega_\varepsilon\backslash E} \Phi\left(K(\,y\,)\right)\,dy\,.$$

Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, приходим к (24). $\Box$

4. Теоремы сходимости для матричных дилатаций. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ – произвольное отображение конечного метрического искажения. **Матричной дилатацией** f называется величина

$$M_f\,(x) = \frac{f'\,(x)}{|J\,(x,\,f)\,|^{1/n}}, \tag{29}$$

если x – регулярная точка отображения f, где f дифференцируемо с $J(x,f) \ne 0$, и $M_f\,(x) = \mathbf{I}$ в противном случае. **Дилатационным тензором** f называтся величина

$$G_f\,(x) = M_f^*\,(x)\,M_f\,(x)\,. \tag{30}$$

Здесь и далее M^* означает матрицу, транспонированную к M. Ясно, что $det\,M_f\,(x) = 1 = det\;G_f\,(x)$, и что $K_0\,(x,\,f) = \|M_f\,(x)\,\|^n$ п.в.

Теорема 4. Пусть $f,\, f_j : D \to \mathbb{R}^n$ – FLD гомеоморфизмы, такие, что $f_j \to f$ при $j \to \infty$ локально равномерно в D, $M,\, M_j$ – их матричные дилатации и пусть $K\,(x,\,f_j) \le K\,(x) \in L^1_{loc}$. Предположим, что при $j \to \infty$

$$U_j(x)\,M_j(x) \to M_0(x). \tag{31}$$

для некоторой последовательности ортогональных матриц $U_j(x)$. Тогда

$$M\left(x\right) = U\left(x\right)M_0\left(x\right). \tag{32}$$

для некоторой ортогональной матрицы $U(x)$.

Доказательство. Пусть $A_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ перенумерация всех матриц с рациональными элементами, удовлетворяющих условию $det\,A_m = 1$. Заметим, что каждая матрица A_m определяет квазиконформное линейное отображение $x \rightarrowtail Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$ интерпретируется как вектор-столбец. Пусть N и N_j – матричные дилатации отображений $f \circ A_m^{-1}$ и $f_j \circ A_m^{-1}$, соответственно. Поскольку

$$M_{f\circ g}\left(x\right) \;=\; M_f\left(g\left(x\right)\right)\cdot M_g\left(x\right)\;,$$

то

$$N\left(y\right) \;=\; M\left(A_m^{-1}y\right)A_m^{-1}\,, \quad N_j\left(y\right) \;=\; M_j\left(A_m^{-1}y\right)A_m^{-1}\,. \tag{33}$$

Заметим, что отображения $f \circ A_m^{-1}$ и $f_j \circ A_m^{-1}$ - также гомеоморфизмы класса FLD, $f_j \circ A_m^{-1} \to f \circ A_m^{-1}$ локально равномерно при $j \to \infty$, причём (см. [18], неравенство (2.11), Гл.I)

$$K_0\left(y, f_j \circ A_m^{-1}\right) \;\leq\; K_0\left(A_m^{-1}y, f_j\right)\, K_0\left(A_m^{-1}\right) \;\leq\; K\left(A_m^{-1}y\right)\cdot c_m^n \;\in L^1_{loc}\,,$$

где $c_m \;=\; \|A_m^{-1}\|$ – матричная норма A_m^{-1}. Таким образом, при каждом фиксированном $m \in \mathbf{N}$ отображения $f \circ A_m^{-1}$ и $f_j \circ A_m^{-1}$ удовлетворяют условию Теоремы 2. Поскольку $K_0\left(x,\, f\right) \;=\; \|M_f\left(x\right)\|^n$, в силу Теоремы 2, для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots,$

$$\|M\left(A_m^{-1}y\right)A_m^{-1}\| \;\leq\; \limsup_{j\to\infty}\|M_j\left(A_m^{-1}y\right)A_m^{-1}\|. \tag{34}$$

Поэтому также для каждого фиксированного $m = 1, 2, \ldots,$

$$\|M\left(x\right)A_m^{-1}\| \;\leq\; \limsup_{j\to\infty}\|M_j\left(x\right)A_m^{-1}\|. \tag{35}$$

Поскольку множество матриц A_m счётно, то соотношение (35) будет выполнено для п.в. $x \in D$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что множество матриц $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ плотно в пространстве всех матриц с $det\,A \;=\; 1$ и, кроме того, из (31) следует, что $det\,M_0\left(x\right) \;=\; 1$ п.в.

Пусть x_* – точка, в которой (35) выполнено для всех $m \;=\; 1, 2, \ldots$. Пусть $A_{m_k} \to M_0(x_*)$ при $k \to \infty$. Тогда $A_{m_k}^{-1} \to M_0^{-1}(x_*)$ при $k \to \infty$ и по неравенству треугольника, см. также [18], неравенство (2.10), Гл.I,

$$\begin{aligned}\|M\left(x_*\right)M_0^{-1}\left(x_*\right)\| \;&\leq\; \|M\left(x_*\right)A_{m_k}^{-1}\| \;+\; \|M\left(x_*\right)\left(M_0^{-1}(x_*) - A_{m_k}^{-1}\right)\| \;\leq \\ &\leq\; \|M\left(x_*\right)A_{m_k}^{-1}\| \;+\; \|M\left(x_*\right)\|\cdot\|M_0^{-1}(x_*) - A_{m_k}^{-1}\|\;,\end{aligned} \tag{36}$$

а также

$$\|M_j\left(x_*\right)A_{m_k}^{-1}\| \;\leq\; \|M_j\left(x_*\right)M_0^{-1}\left(x_*\right)\| \;+\; \|M_j\left(x_*\right)\|\cdot\|M_0^{-1}(x_*) - A_{m_k}^{-1}\|\;. \tag{37}$$

Далее, из $(35), (36), (37)$, учитывая, что $\|M_j\left(x_*\right)\| \;\leq\; K^{\frac{1}{n}}\left(x_*\right) \;<\; \infty,$ получаем, что

$$\|M\left(x\right)M_0^{-1}\left(x\right)\| \leq\; \limsup_{j\to\infty}\|M_j\left(x\right)M_0^{-1}\left(x\right)\|. \tag{38}$$

Поскольку U_j – ортогональные матрицы, то

$$\|U_j\,(x)\,M_j\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\,\|\;=\;\|M_j\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\,\|\,.$$

Однако, $U_j\,(x)\,M_j\,(x) \to M_0\,(x)$, поэтому из (38) получаем, что

$$\|M\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\,\|\;\leq\;1. \tag{39}$$

С другой стороны,

$$\|M\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\,\|\;\geq\;1 \tag{40}$$

см. (2.6) в [18], Гл. **I**. Следовательно, из (39) и (40)

$$\|M\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\,\|\;=\;1. \tag{41}$$

Из соотношения (41), учитывая, что $det\,M\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)\;=\;1$ .. $x\,\in\,D$, получаем, что $M\,(x)\,M_0^{-1}\,(x)$ является ортогональным преобразованием $U\,(x)$, т.е., $M\,(x)\;=\;U\,(x)\;M_0\,(x)$ п.в. $x \in D$. Что и требовалось доказать. $\Box$

По Лемме 3.18 из [19], $G_j \to G$ тогда и только тогда, когда $U_jM_j \to M$ для некоторых ортогональных матриц U_j. Поэтому получаем:

Следствие 4. Пусть $f,\, f_j\,:\,D \to \mathbb{R}^n - FLD$ гомеоморфизмы, такие, что $f_j \to f$ при $j \to \infty$ локально равномерно в D, $G,\, G_j$ – их дилатационные тензоры и пусть $K_0\,(x,\,f_j) \leq K\,(x) \in L^1_{loc}$ п.в. $x \in D$. Предположим, что при $j \to \infty$

$$G_j(x) \to G_0(x). \tag{42}$$

Тогда

$$G\,(x)\;=\;G_0\,(x)\,. \tag{43}$$

1. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion, Math. Ann. 317 (2000), 703-726.
2. *Gehring F.W. and Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), 253-264.
3. *Heinonen J. and Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations, Arch. Rat. Mech. Anal. 125 (1993), 81-97.
4. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: compactness, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27, no. 2 (2002), 391-417.
5. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity, Invent. Math. 144, no. 3 (2001), 507-531.
6. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 181-188.
7. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openess, Arch. Rat.Mech. Anal. 160 (2001), 135-151.
8. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N, Michigan Math. J. 49 (2001), 169-181.
9. *Manfredi J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions, Bull. Amer. Math Soc. 32, no.2 (1995), 235-240.
10. *Manfredi J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem, Indiana.Univ.Math. J. 47, no.3 (1998), 1131-1145.
11. *Решетняк Ю.Г.* Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду, Матем. сб. т.75, 3 (1968), 323-334.

12. *Сакс С.* Теория интеграла, М.,ИЛ (1949) – 494с.
13. *Решетняк Ю.Г.* Геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 886-919.
14. *Пономарёв С.П.* $(N^{-1})-$свойство отображений и $(N)-$условие Лузина, Матем. заметки 58(1995), 411-418.
15. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion, J. D. Anal. Math., 93 (2004), 215-236.
16. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q-homeomorphisms, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., 30, no.1 (2005), 49-69.
17. *Куратовский К.* Топология, М., Мир, т.1 (1966) – 594с.
18. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением Новосибирск: Наука, 1982.
19. *Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space qusiregular mappings, Forum Math. 10 (1998), 353-375.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua
sevostyanov@skif.net

Получено 25.05.05