НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК 28

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов — Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 1999

УДК 531.38

 И.Н. Гашененко

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА

Выполнен локальный анализ подвижных алгебраических точек ветвления уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Получены многопараметрические семейства рядов Пюизё, описывающие поведение известных точных решений в окрестности критических полюсов на комплексной плоскости времени.

Один из наиболее ярких и интригующих результатов в динамике твердого тела был получен С.В.Ковалевской [8,9] благодаря виртуозному применению идей и методов аналитической теории дифференциальных уравнений к задаче о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки. Первичная цель ее исследований состояла в определении условий на параметры, при которых общее решение уравнений Эйлера-Пуассона имеет подвижные некритические полюсы, но не имеет других особенностей для всех конечных комплексных значений времени. Проделав некоторые математические вычисления, лишенные очевидного физического смысла, она нашла физические параметры твердого тела, при которых динамические уравнения допускают дополнительный алгебраический интеграл и полностью интегрируются в тэта-функциях времени. Достаточность полученных условий на параметры стала очевидной только после явного интегрирования уравнений Эйлера-Пуассона, т.к. общее решение действительно оказалось мероморфным на всей комплексной плоскости времени. Эти исследования были продолжены и существенно дополнены Г.Г.Аппельротом [2,3] и А.М.Ляпуновым [10]. В частности, А.М.Ляпунову принадлежит постановка задачи об однозначных интегралах нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и решение этой задачи применительно к уравнениям Эйлера-Пуассона. Затем Пенлеве в своем цикле работ по аналитической теории уравнений второго и высших порядков наглядно продемонстрировал перспективность анализа общих решений этих уравнений как аналитических функций во всей области их существования и отметил тесную взаимосвязь интегрируемых уравнений и уравнений, обладающих свойством отсутствия подвижных критических точек (см., например, [6]). В последнее время возродился интерес к изучению аналитической структуры динамических систем, важнейшие направления исследований отражены в работах [1,7,11,12]. В работе [13] приводится сравнительный обзор известных результатов, объясняющих зависимость интегрируемости системы от аналитических свойств решений динамических уравнений в комплексной области.

Локальный анализ подвижных особых точек системы комплексных нелинейных уравнений состоит из трех основных этапов [1]: на первом этапе определяют поведение главной части решения

$$x_i(t) \sim \frac{x_i^0}{(t-t_0)^{\alpha_i}}$$

и вычисляют постоянные x_i^0, α_i; на втором – находят степени, при которых в разложение могут войти произвольные постоянные; на третьем этапе последовательно вычисляют коэффициенты до тех пор, пока все произвольные постоянные не войдут в искомое разложение. Последний этап носит вычислительный характер и является наиболее трудоемким, ориентированным на использование современных компьютерных систем символьных математических вычислений.

Рассмотрим уравнения, описывающие движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали, $\mathbf{r}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс тела. Известными интегралами (1) являются

$$H = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = h, \;\; G = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \;\; I = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Будем рассматривать время t как комплексную переменную. Тогда фазовые переменные ω_i, ν_i целесообразно также полагать комплексными. Однако величины A_i, r_i, h, g, входящие в комплексифицированные уравнения (1),(2), по-прежнему будем считать действительными.

Предположим, что компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ имеют следующие асимптотические разложения

$$\omega_i = (t-t_0)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_i^{(k)} (t-t_0)^k, \;\; \nu_i = (t-t_0)^{\beta_i} \sum_{k=0}^{\infty} \nu_i^{(k)} (t-t_0)^k, \tag{3}$$

где α_i, β_i – целые числа, среди которых обязательно есть и отрицательные, а коэффициенты $\omega_i^{(k)}, \nu_i^{(k)}$ являются комплексными числами либо свободными параметрами. Далее будем использовать вектор $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, составленный из показателей первых (ненулевых) членов разложения решения в ряды Лорана (3) вблизи подвижного полюса.

Уравнения (1) инвариантны относительно преобразования

$$(t, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto (\sigma^{-1} t, \sigma \boldsymbol{\omega}, \sigma^2 \boldsymbol{\nu}). \tag{4}$$

Если в (3) положить $\alpha_i = -1, \beta_i = -2$, тогда асимптотическое представление фазовых координат $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ не изменится при подстановке (4). Случай $\alpha_i = -1, \beta_i = -2$ рассмотрен С.В.Ковалевской [9] в предположении, что среди коэффициентов ω_i^0, ν_i^0 существуют ненулевые величины. Эти коэффициенты ω_i^0, ν_i^0 находят из системы нелинейных алгебраических уравнений, которая в векторной форме имеет следующий вид

$$A\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}^0 + A\boldsymbol{\omega}^0 = 0, \quad \boldsymbol{\nu}^0 \times \boldsymbol{\omega}^0 + 2\boldsymbol{\nu}^0 = 0. \tag{5}$$

Известными решениями системы (5) являются [2,9,10]:

$$\begin{aligned}
&\mathit{1})\ \ \omega_1^0 = 2a_2 a_3,\ \ \omega_2^0 = 2a_3 a_1,\ \ \omega_3^0 = -2a_1 a_2,\\
&\quad\ \nu_1^0 = 2\mu(A_2 - A_3)a_1,\ \ \nu_2^0 = 2\mu(A_3 - A_1)a_2,\ \ \nu_3^0 = -2\mu(A_1 - A_2)a_3, \qquad (6)\\
&\quad\ a_1^2 = (A_1 + \delta)(A_2 - A_3)^{-1},\ \ (123),\ \ \mu^{-1} = r_3 a_3^{-1} - r_1 a_1^{-1} - r_2 a_2^{-1}\ \ ;
\end{aligned}$$

$$\mathit{2})\ \ \omega_1^0 = \omega_3^0 = \nu_2^0 = 0,\ \ \omega_2^0 = 2i,\ \ \nu_1^0 = i\nu_3^0 = -2A_2(r_1 - ir_3)^{-1},\ \ r_2 = 0; \tag{7}$$

$$\mathit{3})\ \ {\omega_1^0}^2 = A_2 A_3 (A_3 - A_1)^{-1}(A_1 - A_2)^{-1},\ \ (123),\ \ \nu_i^0 = 0; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\mathit{4})\ \ \omega_1^0 = -i\omega_2^0 = 2iA_3 r_3 (A_1 - 2A_3)^{-1} r_1^{-1},\ \ \omega_3^0 = 2i,\\
&\quad\ \nu_1^0 = -i\nu_2^0 = -2A_3 r_1^{-1},\ \ \nu_1^0 = 0,\ \ A_1 = A_2,\ \ r_2 = 0; \qquad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathit{5})\ \ \omega_1^0 = r_3 A_1^{-1} \nu_2^0,\ \ \omega_2^0 = -r_3 A_1^{-1} \nu_1^0,\ \ \omega_3^0 = 0,\\
&\quad\ {\nu_1^0}^2 + {\nu_2^0}^2 = -4A_1^2 r_3^{-2},\ \ \nu_3^0 = -2A_1 r_3^{-1},\ \ A_1 = A_2,\ \ r_1 = r_2 = 0. \qquad (10)
\end{aligned}$$

В случае *1*) для нахождения величины δ имеется дополнительное соотношение [9]. Из результатов [2] следует, что в случае *3*) ряды (3) не содержат логарифмических членов только при дополнительных ограничениях: $r_1\sqrt{A_1(A_2 - A_3)} = r_3\sqrt{A_3(A_1 - A_2)},\ \ r_2 = 0$.

Некоторые частные решения уравнений (1) найдены в предположении, что центр масс тела принадлежит главной оси инерции. Поэтому выделим для дальнейшего анализа частный случай *1)*, полученный подстановкой в (6) выражений

$$\delta = -\frac{A_1}{2},\ \ \mu = \frac{A_1}{2(A_3 - A_1)r_1},\ \ r_2 = r_3 = 0, \tag{11}$$

а также отметим два варианта, которые следуют из *2)*:

$$\omega_1^0 = \omega_3^0 = \nu_2^0 = 0,\ \ \omega_2^0 = 2i,\ \ \nu_1^0 = i\nu_3^0 = -2A_2 r_1^{-1},\ \ r_2 = r_3 = 0, \tag{12}$$

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \nu_3^0 = 0,\ \ \omega_3^0 = 2i,\ \ \nu_1^0 = i\nu_2^0 = -2A_3 r_1^{-1},\ \ r_2 = r_3 = 0. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения: пусть

$$\mathcal{J} = \left\| \begin{array}{cccccc}
1 & (1 - A_3 A_2^{-1})\omega_3^0 & (A_2 A_3^{-1} - 1)\omega_2^0 & 0 & -r_3 & r_2\\
(A_3 A_1^{-1} - 1)\omega_3^0 & 1 & (1 - A_1 A_3^{-1})\omega_1^0 & r_3 & 0 & -r_1\\
(1 - A_2 A_1^{-1})\omega_2^0 & (A_1 A_2^{-1} - 1)\omega_1^0 & 1 & -r_2 & r_1 & 0\\
0 & -A_2^{-1}\nu_3^0 & A_3^{-1}\nu_2^0 & 2 & \omega_3^0 & -\omega_2^0\\
A_1^{-1}\nu_3^0 & 0 & -A_3^{-1}\nu_1^0 & -\omega_3^0 & 2 & \omega_1^0\\
-A_1^{-1}\nu_2^0 & A_2^{-1}\nu_1^0 & 0 & \omega_2^0 & -\omega_1^0 & 2
\end{array} \right\|$$

-6×6-матрица с комплексными элементами; $\mathcal{E}$ – единичная 6×6-матрица; $x^{(k)}$ – вектор-столбец, состоящий из компонент $A_i\omega_i^{(k)}$и $\nu_i^{(k)}$; $c^{(k)}$ – вектор-столбец, компонентами которого являются многочлены от $A_i\omega_i^{(m)}, \nu_i^{(m)}$ с индексами $m<k$. Тогда последовательное решение систем линейных уравнений

$$(\mathcal{J}-k\mathcal{E})x^{(k)}=c^{(k)} \tag{14}$$

позволяет рекуррентно вычислять все коэффициенты рядов Лорана (3). Произвольные константы появляются в рядах (3) только тогда, когда корнями λ_i характеристического уравнения $\det(\mathcal{J}-\lambda\mathcal{E})=0$ оказываются натуральные числа. Корни λ_i называются показателями Ковалевской [13].

Теорема(Ковалевская [9], Аппельрот [2]). Условие, необходимое для того, чтобы ряды (3) при $\alpha_i=-1, \beta_i=-2$ могли представлять общие интегралы дифференциальных уравнений (1), выполняется только тогда, когда постоянные A_i, r_i удовлетворяют одному из следующих четырех условий:

а) $r_1=r_2=r_3=0$;

б) $A_1=A_2,\ \ r_1=r_2=0$;

в) $A_1=A_2=2A_3,\ \ r_3=0$;

г) $r_1\sqrt{A_1(A_2-A_3)}=r_3\sqrt{A_3(A_1-A_2)},\ \ r_2=0,\ \ A_1>A_2>A_3$.

Заметим, что работе [9] к условиям *а),б),в)* был добавлен еще один случай ($A_1=$ $=A_2=A_3$), который является следствием *б)*, т.к. сферически симметричное тело поворотом осей можно привести к частному случаю волчка Лагранжа. Г.Г.Аппельрот и П.А.Некрасов существенно дополнили теорему С.В.Ковалевской, включив в нее условия *г)*, которые характеризуют распределение масс маятника Гесса. В этом случае общее решение уравнений (1) не является однозначным при всех значениях t, даже при тех частных начальных условиях, когда существует найденный В.Гессом линейный интеграл. Многозначность случая *г)* учтена в следующей теореме:

Теорема(Ляпунов [10]). Из всех случаев, когда постоянные A_i, r_i вещественны и A_i все отличны от нуля, известные три случая *а),б),в)* суть единственные, в которых функции ω_i, ν_i, определяемые уравнениями (1), однозначные при всяких начальных значениях.

Случай Эйлера. Если тело закреплено в центре масс ($r_1=r_2=r_3=0$), тогда $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(-1,-1,-1,-1,-1,-1)$, характеристический многочлен матрицы $\mathcal{J}$ имеет вид

$$\det(\mathcal{J}-\lambda\mathcal{E})=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

Две константы входят в ряды Лорана (3) при $k=1,3$, оставшиеся три константы – при $k=2$.

Случай Лагранжа. Осесимметричный волчок ($A_1=A_2,\ \ r_1=r_2=0$) имеет показатели $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(-1,-1,0,-2,-2,-2)$, характеристический многочлен матрицы $\mathcal{J}$ записывается в виде

$$\det(\mathcal{J}-\lambda\mathcal{E})=(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4).$$

Произвольные константы входят в ряды Лорана (3) при $k=0,1,2,3,4$.

Случай Ковалевской. Для тела с распределением масс $A_1 = A_2 = 2A_3,\ \ r_2 = r_3 = 0$ показатели рядов Лорана известны: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1, -1, -1, -2, -2, -1)$, характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4).$$

Произвольные константы входят в ряды (3) при $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Случай Гесса. Параметры, характеризующие распределение масс, подчиним условиям $r_1\sqrt{A_1(A_2 - A_3)} = r_3\sqrt{A_3(A_1 - A_2)},\ \ r_2 = 0,\ \ A_1 > A_2 > A_3$, тогда показатели главных членов (3) все равны: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1, -1, -1, -1, -1, -1)$, характеристический многочлен матрицы $\mathcal{J}$ имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

Две константы входят в ряды (3) при $k = 1, 3$, еще три константы – при $k = 2$.

Теорема(Аппельрот [3]). В случае трех неравных моментов инерции не существует не только общих, но и частных интегралов уравнений (1), в которых порядок полюса для ω_i был бы больше единицы, а для ν_i – больше двух; но в случае $A_1 = A_2 \neq A_3,\ \ r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$ могут существовать частные интегралы с полюсами третьего порядка для ω_1, ω_2.

Переходя к изучению мероморфных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона, отметим работы [4,5], в которых на основе уравнений В.Гесса исследовались необходимые условия существования однозначных решений динамики твердого тела. Специфика настоящей работы состоит в определении точного числа произвольных постоянных, которые содержатся в рядах Лорана при заданных параметрах твердого тела. Заметим, что в большинстве случаев произвольные постоянные, которые содержатся в (3), принимают фиксированные значения на самом решении.

Физический маятник. Если центр масс тела принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции ($r_3 = 0$), тогда при нулевой константе площадей и начальных условиях $\omega_1 = \omega_2 = \nu_3 = 0$ тело движется как физический маятник. Показатели запишем в виде $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (2, 2, -1, -2, -2, 1)$, тогда характеристический многочлен примет вид [10]

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda^2 - \lambda - c_0),$$

где $c_0 = 2A_1^{-1}A_2^{-1}\left[(A_1 - A_3)(A_2 - 2A_3) + A_3(A_1 - A_2)r_1(r_1 + ir_2)(r_1^2 + r_2^2)^{-1})\right]$. Без дополнительных ограничений на параметры A_i, r_i три константы входят в ряды Лорана (3) при $k = 2, 3, 4$; две из них необходимо зафиксировать, т.к. $G = 0,\ \ I = 1$.

Случай Бобылева–Стеклова. Пусть параметры тела удовлетворяют условиям $A_1 = 2A_3,\ \ A_2 = \gamma A_3,\ \ \gamma \in [1, 3],\ \ r_2 = r_3 = 0$, тогда определим показатели рядов Лорана $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (0, 2, -1, -2, -2, -1)$ и запишем характеристический многочлен матрицы $\mathcal{J}$ в виде

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4).$$

Четыре константы входят в ряды (3) при $k = 1, 2, 3, 4$.

Случай Стеклова. Если центр масс тела принадлежит главной оси ($r_2 = r_3 = 0$) и выполняется неравенство $(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) < 0$, тогда запишем показатели первых членов разложения $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1, -1, -1, -2, -2, -2)$ и вычислим

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda^2 - \lambda - c_1),$$

где $c_1 = (2 - A_1 A_2^{-1})(2 - A_1 A_3^{-1})$. Три константы входят в ряды Лорана (3) при $k = 2, 3, 4$.

При некоторых значениях c_0, c_1 корни многочлена $\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E})$ могут быть комплексными, поэтому приведем здесь следующий интересный результат:

Теорема(Иошида [13]). Если система уравнений (1) допускает иррациональные или комплексные показатели Ковалевской λ_i , тогда она не является алгебраически интегрируемой, т.к. не может иметь достаточного числа алгебраических первых интегралов, инвариантных относительно преобразования (4).

Рассмотренный список мероморфных решений уравнений (1) можно дополнить некоторыми частными случаями известных решений. Например, частные решения случая Горячева–Чаплыгина являются мероморфными на комплексной плоскости времени, но не все решения этой задачи однозначны [7]. Решения могут вовсе не иметь особых точек в конечной части плоскости. Например, в *случае Гриоли* ($r_1\sqrt{A_2 - A_3} = r_3\sqrt{A_1 - A_2}$, $r_2 = 0$) зависимость фазовых переменных от времени выражена в целых функциях. Но в большинстве известных точных решений эта зависимость выражается в алгебраических функциях, т.е. решения являются мероморфными не на комплексной плоскости времени, а на ее n–листном накрытии. Предположим, что компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ имеют асимптотические разложения по дробным степеням $t - t_0$:

$$\omega_i = (t - t_0)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_i^{(k)} (t - t_0)^{\frac{k}{n}}, \;\; \nu_i = (t - t_0)^{\beta_i} \sum_{k=0}^{\infty} \nu_i^{(k)} (t - t_0)^{\frac{k}{n}}, \tag{15}$$

где n – натуральное число, α_i, β_i – рациональные числа, среди которых обязательно найдутся отрицательные, а коэффициенты $\omega_i^{(k)}, \nu_i^{(k)}$ являются комплексными числами либо свободными параметрами. Если все $\alpha_i \geqslant -1$, тогда можно снова использовать решения (6)-(9) системы (5), полагая некоторые значения ω_i^0, ν_i^0 нулевыми. Вектор $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ по-прежнему будем составлять из показателей первых (ненулевых) членов разложения решения в обобщенные ряды Лорана (15) вблизи подвижного полюса.

Случай Горячева. Для тела с параметрами $A_3 = \gamma A_2$, $A_1 = \frac{16\gamma(1-\gamma)}{(9-8\gamma)} A_2$, $\gamma \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$, $r_2 = r_3 = 0$ запишем показатели рядов (15) : $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -2, -\frac{3}{2})$;здесь $n = 2$, характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{2})^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Четыре произвольные константы входят в ряды (15) при $k = 1, 4, 6, 8$.

Случай Коносевича-Поздняковича. Пусть $A_3 = \gamma A_1$, $A_2 = \frac{4(2\gamma-1)}{(17\gamma-8)} A_1$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1, -1, -1, -2, -2, -2)$, $n = 2$, характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{2})^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Четыре константы входят в ряды (15) при $k = 1, 4, 6, 8$.

Случай Ковалевского. Пусть $A_3 = \gamma A_2, A_1 = \frac{18\gamma(1-\gamma)}{(10-9\gamma)} A_2, \gamma \in [\frac{10}{27}, \gamma_*], r_2 = r_3 = 0$, тогда $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1, -2, -2, -\frac{5}{3})$, $n = 3$, характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{3})(\lambda - \frac{2}{3})(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Пять произвольных констант входят в ряды (15) при $k = 1, 2, 6, 9, 12$.

Случай Чаплыгина. Пусть $A_2 = \gamma A_1$, $A_3 = \frac{9(2\gamma-1)}{2(16\gamma-9)} A_1$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда находим показатели $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1, -1, -1, -2, -2, -2)$, $n = 3$, характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\mathcal{J} - \lambda\mathcal{E}) = (\lambda + 1)(\lambda + \frac{1}{3})(\lambda - \frac{4}{3})(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Четыре константы входят в ряды (15) при $k = 4, 6, 9, 12$.

Во всех рассмотренных случаях используются решения (6)-(13) системы (5). Теперь предположим, что не все $\alpha_i \geqslant -1$ и пусть $A_1 = A_2 \neq A_3$, $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$, тогда (по теореме Г.Г.Аппельрота) могут существовать мероморфные частные решения системы (1). В этом случае можно воспользоваться заменой переменных

$$u_{1,2} = \omega_1 \pm i\omega_2, \;\; v_{1,2} = \nu_1 \pm i\nu_2$$

и записать матрицу $\mathcal{J}$ и линейные системы (14) в другой форме [3]. Этот подход позволил получить полнопараметрические ряды Пюизё для следующего случая.

Случай Горячева–Чаплыгина. Для тела с параметрами $A_1 = A_2 = 4A_3$, $r_2 = r_3 = 0$ вычислим показатели первых членов рядов (15): $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1, -2, -2, -\frac{1}{2})$; здесь снова $n = 2$, новый характеристический многочлен имеет вид

$$\det(\widetilde{\mathcal{J}} - \lambda E) = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - 2).$$

Ряды (15) зависят от пяти произвольных констант: две появляются при $k = 0$, еще три константы появляются при $k = 2, 3, 4$.

Рассмотрим более подробно случай, когда центр масс тела принадлежит главной оси ($r_2 = r_3 = 0$). Иррациональные и комплексные показатели Ковалевской λ_i являются существенным препятствием (см. теорему Иошиды) для нахождения решений уравнений (1), представляемых в проколотой окрестности точки t_0 полнопараметрическими обобщенными рядами Лорана (т.е. рядами Пюизё (15)). Также отметим работу [12], в которой изучается сложное поведение решений уравнений Эйлера–Пуассона и других динамических систем в случае "комплексного резонанса". Составим карту расположения рациональных показателей Ковалевской λ_i на плоскости $(A_2A_1^{-1}, A_3A_1^{-1})$. Необходимые для моментов инерции неравенства вида $A_1 + A_2 \geqslant A_3 > 0$ будут выполняться в полуполосе, изображенной на рис. 1. Зависящие от параметров A_i показатели Ковалевской являются корнями одного из следующих уравнений:

$$\lambda^2 - \lambda - c_0 = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - c_1 = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - c_2 = 0, \tag{16}$$

где $c_0 = 2A_1^{-1}A_2^{-1}(A_1 - 2A_3)(A_2 - A_3)$ и $c_1 = (2 - A_1A_2^{-1})(2 - A_1A_3^{-1})$ (см. физический маятник и случай Стеклова), $c_2 = 2A_1^{-1}A_3^{-1}(A_1 - 2A_2)(A_3 - A_2)$. Если коэффициенты ω_i^0, ν_i^0 рядов (3),(15) удовлетворяют равенствам (6),(11) или (13), тогда линии уровней $\lambda_i = const > 0$ показаны на рис. 1, *а*,*б* соответственно. При выполнении равенств (12) на рис. 1, *б* следует поменять местами координатные оси. Цифрами I–III отмечены области с комплексными корнями λ_i (см. уравнения (16)). Проанализировав известные точные решения уравнений Эйлера-Пуассона заключаем, что при $r_1 \neq 0, r_2 = r_3 = 0$ только в случае Стеклова и в случае физического маятника параметры тела могут принимать значения из областей I–III, во всех остальных случаях параметры $A_2A_1^{-1}$, $A_3A_1^{-1}$ принадлежат кривым, изображенным на рисунке. Особый интерес для исследования представляют случаи, когда все три уравнения (16) имеют рациональные корни. Например, если положить $A_1 = \frac{8}{5}A_3$, $A_2 = \frac{9}{5}A_3$, $r_2 = r_3 = 0$, тогда находим $c_0 = -\frac{2}{9}$, $c_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = 2$. В этом примере выполнены необходимые условия алгебраической интегрируемости, т.к. все показатели λ_i являются целыми или рациональными числами.

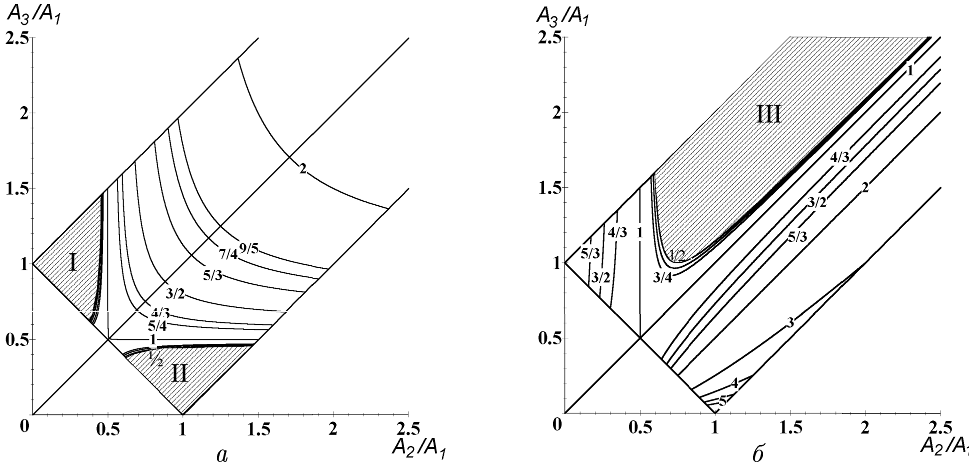

Рис. 1.

1. *Абловиц М.Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир. – 1987. – 479с.
2. *Аппельрот Г.Г.* По поводу §1 мемуара С.В.Ковалевской// Матем. сб. – 1892. – **16**, вып.3. – С.483–507.
3. *Аппельрот Г.Г.* Дополнения к статье "По поводу §1 мемуара С.В.Ковалевской"// Матем. сб. – 1892. – **16**, вып.3. – С.592–596.
4. *Богоявленский А.А.* О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Прикл. матем. и механика. – 1958.–**22**, вып.5. – С. 622–645.
5. *Богоявленский А.А.* О некоторых частных решениях задачи движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Прикл. матем. и механика. – 1958.–**22**, вып.6. – С. 738–749.
6. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
7. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике// Функц. анализ. – 1982. – **16**, вып.3. – С.30-41.;–там же.– 1983. – **17**, вып.1. – С.8-23.
8. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки// Научные работы. – М: Изд-во АН СССР, 1948. – С.153–220.
9. *Ковалевская С.В.* Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки// Научные работы. – М: Изд-во АН СССР, 1948. – С.221–234.
10. *Ляпунов А.М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// Собр. соч.– М: Изд-во АН СССР, 1954. –Т.1.– С.402–417.
11. *Adler M., van Moerbeke P.* Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization// Commun. Math. Phys. – 1982.–**83**. – P.83–106.
12. *Chang Y.F., Green J.M., Tabor M., Weiss J.* The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries// Physica D. – 1983. – N 8. – P.183–207.
13. *Yoshida H., Grammaticos B., Ramani A.* Painlevé resonances versus Kowalewski exponents: some exact results on singularity structure and integrability of dynamical systems// Acta Appl. Math. – 1987. – N8. – P.75–103.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 24.01.99