

УДК 531.38

©2007. И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова

**О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА**

Дан обзор работ, посвященных исследованию проблемы понижения порядка уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Обсуждаются замены переменных, упрощающие поиск алгебраических инвариантных соотношений. С использованием переменных Гесса, Харламова, Андуайе–Депри получены новые формы уравнений.

**Введение.** История создания дифференциальных уравнений динамики твердого тела является весьма интересной и поучительной, она дает возможность проследить все этапы формирования одной из наиболее удачных математических моделей аналитической механики.

В 1749 г. Жан Лерон Даламбер приступил к изучению чрезвычайно трудной задачи о движении Земли, рассматриваемой как твердое тело, под действием сил притяжения Солнца и Луны. Эта работа привлекла к себе большое внимание научной общественности и явилась мощным стимулом развития исследований по динамике твердого тела. Последовавшие за этим работы Леонарда Эйлера признаны классическими. Он создал геометрию масс, ввел понятие угловой скорости, определил главные оси координат, отнес к ним кинематические характеристики, записал динамические и кинематические уравнения, свел к квадратурам задачу о движении произвольного тела по инерции.

Результатом титанической работы Эйлера явились дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Эти знаменитые уравнения носят теперь название *уравнений Эйлера–Пуассона*:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M} = A\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент,  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции тела в его неподвижной точке,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость,  $\boldsymbol{\gamma}$  – орт силы тяжести,  $\mathbf{r}$  – орт, направленный из неподвижной точки к центру тяжести тела. Первые интегралы уравнений (1) определяются следующими формулами:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = h, \quad G = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\gamma} = g, \quad I = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \quad (2)$$

Сформированные Л. Эйлером уравнения стремились усовершенствовать Ж.Л. Лагранж, С.Д. Пуассон, В. Гесс [1], П.А. Шифф [2], С.А. Чаплыгин [3], Н. Ковалевский [4], А.Д. Билимович [5] и др. В результате были созданы замечательные уравнения, которые до сих пор удивляют остроумием и разнообразием примененных математических приемов.

**1. Специальные оси и уравнения П.В. Харламова.** Существенным образом понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1) с помощью известных первых интегралов (2) удалось не так давно: в 1962 году П.В. Харламов отказался от традиционного использования главных осей тензора инерции в неподвижной точке тела и определяющую роль придал оси, идущей из неподвижной точки к центру масс тела. Вместо тензора инерции он использовал гирационный тензор и связал с ним определенным образом выбор оставшихся двух осей. Такие оси П.В. Харламов [6] назвал специальными. Понижение порядка уравнений Эйлера–Пуассона осуществляется в специальных осях координат наиболее простым способом, что и обусловило их появление. Задача о движении тела была сведена к двум дифференциальным уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок.

Пусть  $\mathbf{e}_i$  – собственный вектор оператора инерции  $A$ , соответствующий диагональной компоненте  $A_i$ . Положение твердого тела в трехмерном координатном евклидовом пространстве задано ортонормированным репером  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Выберем новый ортонормированный базис  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{r}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{|\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1|} [(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1) \cos \alpha + (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1)) \sin \alpha], \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{|\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1|} [(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1)) \cos \alpha - (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1) \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (3)$$

Угол  $\alpha$  соответствует повороту координатных осей, жестко связанных с телом. Целесообразный выбор угла  $\alpha$  позволяет упрощать дифференциальные уравнения движения. Следуя работе [7, §2.6], положим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_1(A_2 - A_3) r_1 r_2 r_3}{A_2(A_3 - A_1)(r_2^2 + r_3^2) + A_1(A_2 - A_3)(r_3^2 - r_2^2 r_1^2)}. \quad (4)$$

Формулами (3),(4) задано преобразование от главных осей к специальным осям П.В. Харламова. В результате первая координатная ось проведена через центр масс тела, а вторая и третья направлены так, чтобы интеграл энергии принял вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a_{11} \mathcal{M}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \mathcal{M}_2^2 + \frac{1}{2} a_{33} \mathcal{M}_3^2 + a_{12} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 + a_{13} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3 - \nu_1, \quad (5)$$

где  $\mathcal{M}_i$  – компоненты кинетического момента  $\mathcal{M}$  и  $\nu_i$  – компоненты единичного вектора вертикали  $\boldsymbol{\nu}$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ . В новых переменных интегралы  $G, I$  имеют тот же вид, что и в старых переменных:

$$\mathcal{G} = \mathcal{M} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad \mathcal{I} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \quad (6)$$

Изменение координатного базиса соответствует следующим преобразованиям гирационного тензора и тензора инерции твердого тела:

$$a = RBA^{-1}B^T R^T, \quad A = a^{-1} = RBAB^T R^T,$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ -\frac{(r_2^2 + r_3^2)}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_1 r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} \\ 0 & -\frac{r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} & \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} \end{pmatrix}.$$

Следствием (4) являются равенства  $a_{23} = a_{32} = 0$ ,  $\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{13} - \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{23} = 0$ .

Рассмотрим простейшие частные случаи. Пусть  $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ , тогда преобразование подвижного базиса (3) не требуется, так как в исходных переменных  $(\mathbf{M}, \gamma)$  гамильтониан имеет вид (5) с коэффициентами

$$a_{11} = A_1^{-1}, \quad a_{22} = A_2^{-1}, \quad a_{33} = A_3^{-1}, \quad a_{12} = a_{13} = 0.$$

В случае Лагранжа следует положить  $A_2 = A_3 > A_1/2$ , т.е.  $a_{22} = a_{33} < 2a_{11}$ .

Пусть центр масс тела находится в главной плоскости,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ . В этом случае, в соответствии с (4), зададим  $\alpha = 0$ . Находим выражения

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 & (A_2 - A_1) r_1 r_2 & 0 \\ (A_2 - A_1) r_1 r_2 & A_1 r_2^2 + A_2 r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

$$R = \text{diag}(1, 1, 1), \quad a = \begin{pmatrix} A_1^{-1} r_1^2 + A_2^{-1} r_2^2 & (A_2^{-1} - A_1^{-1}) r_1 r_2 & 0 \\ (A_2^{-1} - A_1^{-1}) r_1 r_2 & A_1^{-1} r_2^2 + A_2^{-1} r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для краткости обозначим  $x, y, z$  компоненты  $\mathcal{M}_i$  кинетического момента  $\mathcal{M}$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ .

Уравнения П.В. Харламова (1962):

$$X \left( y \frac{dz}{dx} - z \frac{dy}{dx} \right) + (a_{12}y + a_{13}z)(y^2 + z^2) + x \left[ (a_{11} - \frac{1}{2} a_{22})y^2 + (a_{11} - \frac{1}{2} a_{33})z^2 \right] + \frac{1}{2} a_{11}x^3 - hx - g = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (a_{11} - a_{22})xy + (a_{12}y + a_{13}z)y - a_{12}x^2 + X \frac{dz}{dx} \right]^2 + \\ & + \left[ (a_{11} - a_{33})xz + (a_{12}y + a_{13}z)z - a_{13}x^2 - X \frac{dy}{dx} \right]^2 + \\ & + \left[ \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + (a_{12}y + a_{13}z)x - h \right]^2 = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $X = (a_{33} - a_{22})yz + (a_{13}y - a_{12}z)x$ ,  $x$  – независимая переменная,  $y, z$  – две зависимые переменные. Уравнения Харламова [6, 7] получены в предположении  $x \neq \text{const}$ . Определив из уравнений (7),(8) зависимость  $y$  и  $z$  от  $x$ , найдем  $x(t)$  из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (a_{33} - a_{22})yz + (a_{13}y - a_{12}z)x. \quad (9)$$

Таким образом задача понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона была полностью решена.

С помощью кинетической энергии  $T = \frac{1}{2} a \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}$  уравнения (7), (8) записываются в более компактном виде:

$$\begin{aligned} & \left( y \frac{\partial T}{\partial z} - z \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( y \frac{dz}{dx} - z \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial T}{\partial x} - (T + h)x - g = 0, \\ & \left[ y \frac{\partial T}{\partial x} - x \frac{\partial T}{\partial y} + \left( y \frac{\partial T}{\partial z} - z \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dz}{dx} \right]^2 + \\ & + \left[ z \frac{\partial T}{\partial x} - x \frac{\partial T}{\partial z} - \left( y \frac{\partial T}{\partial z} - z \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} \right]^2 + (T - h)^2 = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты гирационного тензора  $a_{ij}$  входят в уравнения (10) неявно, как коэффициенты функции  $T$  и ее производных.

**2. Уравнения В. Гесса.** Идея исключения компонент  $\gamma_i$  из уравнений Эйлера–Пуассона с помощью интегралов (2) принадлежит Вильгельму Гессу. В работе [1] он показал, что уравнения (1) могут быть приведены к уравнению

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \zeta_1 \mathbf{r} \times A\omega + \zeta_3 \mathbf{r} \times (A\omega \times \mathbf{r}). \quad (11)$$

Пусть векторы  $A\omega, \mathbf{r}$  неколлинеарны, тогда положим

$$\gamma = \zeta_1 A\omega + \zeta_2 \mathbf{r} + \zeta_3 A\omega \times \mathbf{r}. \quad (12)$$

Подстановкой (12) в интегралы (2) находим коэффициенты

$$\zeta_1 = \frac{g - (T - h)(A\omega \cdot \mathbf{r})}{|A\omega \times \mathbf{r}|^2}, \quad \zeta_2 = \frac{(T - h)|A\omega|^2 - (A\omega \cdot \mathbf{r})g}{|A\omega \times \mathbf{r}|^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{|A\omega \times \mathbf{r}|^2},$$

где 
$$T = \frac{1}{2} A\omega \cdot \omega, \quad f = |A\omega \times \mathbf{r}|^2 - |(T - h)A\omega - g\mathbf{r}|^2.$$

Функция  $f(\omega)^{-\frac{1}{2}}$  – последний множитель уравнений (11).

П.В. Харламов показал [7, §3.6], что в специальных осях уравнения Гесса (11) имеют наиболее простой вид:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{M}}_1 &= (a_{33} - a_{22})\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 + (a_{13}\mathcal{M}_2 - a_{12}\mathcal{M}_3)\mathcal{M}_1, \\ \dot{\mathcal{M}}_2 &= (a_{11} - a_{33})\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 - a_{13}(\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_3^2) + a_{12}\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 - \zeta_1\mathcal{M}_3 + \zeta_3\mathcal{M}_2, \\ \dot{\mathcal{M}}_3 &= (a_{22} - a_{11})\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + a_{12}(\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) - a_{13}\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 + \zeta_1\mathcal{M}_2 + \zeta_3\mathcal{M}_3,\end{aligned}$$

где 
$$\zeta_1 = \frac{g - (T - h)\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2},$$

$$T = \frac{1}{2}a_{11}\mathcal{M}_1^2 + \frac{1}{2}a_{22}\mathcal{M}_2^2 + \frac{1}{2}a_{33}\mathcal{M}_3^2 + a_{12}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + a_{13}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3, \quad (13)$$

$$f = \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 - (T - h)^2(\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2) + 2g(T - h)\mathcal{M}_1 - g^2.$$

Как следует из (10),(11), структуру уравнений движения вполне определяют функции  $\frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,  $|A\boldsymbol{\omega}|^2$ ,  $A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ . Гесс [1] предложил использовать эти функции в качестве основных переменных. Введем следующие обозначения:

$$T = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2, \quad x = A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}, \quad w_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}, \quad \omega^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Вторая форма уравнений В. Гесса (1890):

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & g & T - h \\ g & \mu & x \\ T - h & x & 1 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & w_1 \\ x & \mu & 2T \\ w_1 & 2T & \omega^2 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$(\mu - x^2)\frac{dT}{dt} = \left(T - \frac{1}{2}w_1x\right)\frac{d\mu}{dt} + [g - (T - h)x]\frac{dx}{dt}. \quad (16)$$

Кроме трех основных переменных, уравнения (14)-(16) содержат величины  $\omega^2$ ,  $w_1$ , зависимость которых от  $T, \mu, x$  определяется дополнительными алгебраическими соотношениями. Гессу [1, §3] удалось выписать в явном виде только одно из этих соотношений:

$$\begin{aligned}(\omega^2 - w_1^2)(b_5x - b_3w_1) - (2T - xw_1)[(b_1 - b_4)x - (b_2 - b_5)w_1] + \\ + (\mu - x^2)(x - b_4w_1) = 0,\end{aligned} \quad (17)$$

где постоянные параметры имеют вид

$$\begin{aligned}b_1 &= A_1 + A_2 + A_3, \quad b_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1, \quad b_3 = A_1A_2A_3, \\ b_4 &= A_1r_1^2 + A_2r_2^2 + A_3r_3^2, \quad b_5 = A_1A_2r_3^2 + A_2A_3r_1^2 + A_3A_1r_2^2.\end{aligned}$$

В частном случае  $A_2 \neq A_3$ ,  $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$  уравнения Гесса (14)–(16) преобразуются в автономную систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{d\mu}{dt}\right)^2 &= \mu - x^2 - g^2 + 2gx(T - h) - \mu(T - h)^2, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -[2T - \mu A_2^{-1} + (A_2^{-1} - A_1^{-1})x^2][2T - \mu A_3^{-1} + (A_3^{-1} - A_1^{-1})x^2], \\ (\mu - x^2) \frac{dT}{dt} &= \left(T - \frac{x^2}{2A_1}\right) \frac{d\mu}{dt} + [g - (T - h)x] \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

До тех пор, пока не определена явная и простая зависимость  $w_1$  от  $T, \mu, x$ , уравнения (14)–(16) будут иметь лишь ограниченное применение. Дополним начатое Гессом исследование общего случая. Введем обозначения

$$c_0 = \frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \quad c_1 = \frac{a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \quad c_3 = \frac{a_{22}^2a_{13}^2 + a_{33}^2a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \quad c_2 = a_{11} - c_1.$$

Заменим переменные  $w_1, T$  на  $w_0, T_0$  с помощью формул

$$w_0 = w_1 - a_{11}x, \quad T_0 = 2T - c_1\mu - c_2x^2. \quad (18)$$

В новых переменных соотношение (17) примет вид

$$\begin{aligned} w_0[\omega^2 - (w_0 + a_{11}x)^2] - c_3w_0(\mu - x^2) - \\ - [(a_{22} + a_{33})w_0 + (a_{12}^2 + a_{13}^2)x](T_0 - xw_0) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем второе алгебраическое соотношение

$$\frac{1}{a_{12}^2} [c_0w_0^2 + T_0 - 2xw_0]^2 + \frac{1}{a_{13}^2} [c_0w_0^2 - T_0 + 2xw_0]^2 = 4c_0^2w_0^2(\mu - x^2). \quad (20)$$

Именно соотношения (18), (20) выражают зависимость  $w_1$  от гессовых переменных  $T, \mu, x$ . После исключения  $\omega^2$  уравнения (14)–(16) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^2 &= 4(\mu - x^2 - g^2) + 4gx[T_0 + c_1\mu + c_2x^2 - 2h] - \\ &\quad - \mu[T_0 + c_1\mu + c_2x^2 - 2h]^2, \\ w_0\dot{x}^2 &= a_{12}^2a_{13}^2c_0^2w_0(\mu - x^2)^2 - w_0(T_0 - xw_0)^2 + \\ &\quad + [(a_{12}^2 - a_{13}^2)c_0w_0 + (a_{12}^2 + a_{13}^2)x](T_0 - xw_0)(\mu - x^2), \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\mu - x^2)\dot{T}_0 = [T_0 - xw_0]\dot{\mu} + [2g - (T_0 + (c_2 + a_{11})\mu - c_2x^2 - 2h)x]\dot{x}.$$

Уравнения (20), (21) можно достаточно просто привести к системе двух дифференциальных уравнений. Выберем  $\mu$  в качестве независимой переменной.

Из последнего уравнения (21) найдем  $w_0$ , подставим полученное выражение в (20) и во второе уравнение (21). Величину  $dt$  исключим с помощью первого уравнения (21). Полученные таким образом дифференциальные полиномы будут третьей и четвертой степени относительно производных  $dx/d\mu$ ,  $dT_0/d\mu$ .

П.А. Шифф [2] вслед за В. Гессом получил дифференциальные уравнения вида (14)–(16), связывающие переменные  $x, \mu, T$  и компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Эти уравнения, названные в [8] *уравнениями Гесса–Шиффа*, не имеют преимуществ по сравнению с исходными уравнениями Эйлера–Пуассона, поскольку их следует рассматривать совместно с тремя алгебраическими соотношениями  $2T = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$ ,  $x = A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ .

**3. Углы Эйлера и канонические переменные для специальных осей.** Положение твердого тела в пространстве определено тремя независимыми координатами – углами Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$ . Найдем выражения фазовых переменных  $\mathcal{M}_i, \nu_i$  через импульсы  $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$  и углы Эйлера  $\theta, \varphi, \psi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= p_\varphi, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi, \\ \mathcal{M}_3 &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi; \\ \nu_1 &= \cos \theta, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Положим  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ . Обратное к (22) преобразование дают формулы

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \mathcal{M}_1, \quad \varphi = \arctg(\nu_2/\nu_3), \quad p_\psi = \mathcal{M} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ p_\theta &= \frac{\mathcal{M}_2 \nu_3 - \mathcal{M}_3 \nu_2}{\sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}}, \quad \theta = \arccos \nu_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановкой соотношений (22) в (5) найдем гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} a_{11} p_\varphi^2 + \frac{1}{2} a_{22} \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} a_{33} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi \right)^2 + \\ &+ a_{12} p_\varphi \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi \right) + \\ &+ a_{13} p_\varphi \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi \right) - \cos \theta. \end{aligned}$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\psi},$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}.$$

Переменная  $\psi$  не входит явно в гамильтониан  $\mathcal{H}$ , поэтому соответствующий импульс  $p_\psi$  постоянен. Исключением одного из оставшихся импульсов ( $p_\varphi$  или  $p_\theta$ ) из уравнений и заменой времени, получим систему канонических уравнений второго порядка.

Описать движение тела вокруг неподвижной точки можно уравнениями Лагранжа, в которых углы Эйлера являются обобщенными координатами. А.Д. Билимович [5] применил известные методы аналитической механики для понижения порядка такой системы: он записал уравнения Лагранжа и Рауса, перешел к уравнению Якоби, показал, что задача может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка  $y'' = P_3 + V P_2 \sqrt{V_1 P_2}$ , где  $x = \text{tg}(\theta/2)$ ,  $y = \text{tg}(\varphi/2)$ ,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dx$ ;  $V, V_1$  – рациональные функции переменных  $x, y$ ;  $P_2, P_3$  – полиномы второй и третьей степени относительно производной  $y'$  с коэффициентами, рациональными функциями  $x, y$ .

Аналогичные уравнения второго порядка были получены в работах [9] – [12] другими методами, с использованием различных координат, задающих пространственную ориентацию твердого тела. См. также работы [13]–[15], развивающие эти исследования.

**4. Центр масс принадлежит главной оси инерции.** Некоторые частные решения уравнений Эйлера–Пуассона были найдены в предположении, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции. Симметрии этого случая позволяют вводить удобные фазовые переменные и записывать дифференциальные уравнения, предназначенные для нахождения простых точных решений, выражаемых в терминах хорошо изученных функций. В работе [4] Н. Ковалевский применил метод вариации постоянных к интегрируемому случаю Эйлера, записал в достаточно простой форме уравнения движения твердого тела при ограничениях  $A_2 \neq A_3$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$ , нашел новое частное решение уравнений Эйлера–Пуассона.

*Уравнения Н. Ковалевского (1908):*

$$\begin{aligned} \sigma'' \tau + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + a_1 + a_2 \sigma + a_3 \tau' \omega_1 + a_4 \tau + a_5 \omega_1^2 &= 0, \\ \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + b_1 + b_2 \sigma' \omega_1 + b_3 \sigma + b_4 \tau + b_5 \omega_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\omega_1$  – независимая переменная,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\omega_1$ , зависимыми переменными являются

$$\sigma = (A_2 - A_3) \omega_2^2 / A_1, \quad \tau = (A_2 - A_3) \omega_3^2 / A_1,$$

постоянные  $a_i, b_i$  – рациональные функции главных моментов инерции  $A_i$  и константы энергии  $h$ .

Интегралы уравнений (24) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma' \tau - \sigma \tau' + c_1 + c_2 \omega_1 + c_3 \sigma \omega_1 + c_4 \tau \omega_1 + c_5 \omega_1^3 &= 0, \\ d_1 (\sigma')^2 \tau + \sigma (\tau')^2 + d_2 + d_3 \sigma + d_4 \tau + d_5 \sigma^2 + d_6 \sigma' \tau \omega_1 + d_7 \sigma \tau' \omega_1 + & (25) \\ + d_8 \sigma \tau + d_9 \tau^2 + d_{10} \omega_1^2 + d_{11} \sigma \omega_1^2 + d_{12} \tau \omega_1^2 + d_{13} \omega_1^4 &= 0, \end{aligned}$$

они образуют замкнутую подсистему второго порядка.

Как известно из [3], С.А. Чаплыгин стремился таким образом преобразовать исходные уравнения Эйлера, чтобы нахождение новых случаев интегрируемости стало более прозрачным. С этой целью в нескольких неопубликованных рукописях [3] он использовал переменные

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2(A_2 - A_3)} (2A_2 T - |\mathbf{M}|^2) = \frac{A_3}{2} \omega_3^2 - \frac{A_1(A_1 - A_2)}{2(A_2 - A_3)} \omega_1^2, \\ \tau_1 &= \frac{1}{2(A_2 - A_3)} (2A_3 T - |\mathbf{M}|^2) = -\frac{A_2}{2} \omega_2^2 + \frac{A_1(A_3 - A_1)}{2(A_2 - A_3)} \omega_1^2 \end{aligned}$$

для вывода дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (24), затем записал интеграл площадей (25) и показал, как из полученных уравнений следуют интегрируемые случаи Ковалевской и Горячева–Чаплыгина.

К настоящему времени уравнения Н. Ковалевского являются наиболее изученными уравнениями движения твердого тела. С помощью методов степенной геометрии для решений системы (24) в случае общего положения вычислены все семейства степенных и степенно-логарифмических асимптотик и разложений. Указаны множества значений параметров  $A_1, A_2, A_3$ , в которых разложения всех семейств *a)* не имеют комплексных показателей, *б)* не имеют логарифмов, *в)* имеют только рациональные показатели. Вычислены характеристики соответствующих семейств разложений решений уравнений Эйлера–Пуассона. Краткий обзор перечисленных результатов см. в работе [16]. Кроме того, в явном виде найдены все частные решения системы (24), представимые конечными суммами рациональных степеней независимой переменной  $\omega_1$ . Эти результаты изложены в работе [17].

**5. Центр масс принадлежит главной плоскости инерции.** Все частные решения уравнений Эйлера–Пуассона получены при условии, что центр масс тела находится в одной из главных плоскостей инерции. Поэтому особый интерес представляют простые уравнения, полученные при ограничении  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ .

Интегродифференциальное уравнение Е.И. Харламовой [18]:

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[ 2 \frac{dY}{dx} + a_{33}(x - iy) \right] \left[ (\nu_1^0 + i\nu_2^0) \exp \int_{x_0}^x \frac{ia_{33} d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{x_0}^x [(a_{22} - ia_{12})y(\zeta) + (a_{12} - ia_{11})\zeta] \frac{dY(\zeta, y(\zeta))}{d\zeta} \left( \exp \int_{\zeta}^x \frac{ia_{33} d\tau}{X(\tau, y(\tau))} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))} \right] \right\} = a_{33}g + (a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{11}x^2 - 2h) \frac{dY}{dx},$$

где

$$X(x, y) = a_{12}x + (a_{22} - a_{33})y, \quad Y(x, y) = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{33})x^2 + \frac{1}{2} (a_{22} - a_{33})y^2 + a_{12}xy.$$

Интегродифференциальное уравнение связывает компоненты  $x, y$  вектора кинетического момента  $\mathcal{M}$  и тем самым определяет функцию  $y(x)$ . Если эта функция найдена, то зависимость  $\nu_1(x), \nu_2(x)$  устанавливается из соотношения

$$\nu_1 + i\nu_2 = (\nu_1^0 + i\nu_2^0) \exp \int_{x_0}^x \frac{ia_{33} d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))} + \int_{x_0}^x [(a_{22} - ia_{12})y(\zeta) + \\ + (a_{12} - ia_{11})\zeta] \frac{dY(\zeta, y(\zeta))}{d\zeta} \left( \exp \int_{\zeta}^x \frac{ia_{33} d\tau}{X(\tau, y(\tau))} \right) \frac{d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))}.$$

Интегродифференциальное уравнение содержит выражения, трансцендентные по отношению к  $y(x)$ . Для изучения условий существования алгебраических инвариантных соотношений, связывающих  $y$  и  $x$ , это уравнение было преобразовано в [19] к более удобной форме. В частности, в [19] введена новая независимая переменная  $\sigma$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{a_{33}}{s} \frac{dx}{d\sigma} = a_{12}x + (a_{22} - a_{33})y,$$

где  $s$  – постоянный параметр, используемый для упрощения получающихся выражений. Метод построения точных решений уравнений динамики твердого тела, основанный на использовании свойств интегродифференциального уравнения, и результаты системного анализа условий существования алгебраических инвариантных соотношений, приведшего к открытию новых решений задачи о движении гиригата, изложены в монографии [20].

Уравнения А.И. Докшевича [21]:

$$\begin{aligned} U'' + U &= a_0 + a_1 V' V'' + a_2 V'^2 + a_3 V V' + a_4 V^2, \\ (V' + b_1 V) U' - (2V'' + b_2 V) U + b_3 V^2 V'' + \\ &+ b_1 V'^3 + b_4 V V'^2 + b_5 V^3 + b_6 V = b_0, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\tau$  – независимая переменная,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\tau$ ,  $d\tau/dt = a_{33}z$ , коэффициенты  $a_i, b_i$  – постоянные. Зависимыми переменными в (26) являются

$$V = \frac{a_{33}}{a_{33} - a_{22}} x, \quad U = \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} x^2 \left[ \frac{2a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}} + \frac{3a_{12}^2}{(a_{33} - a_{22})^2} \right]. \quad (27)$$

Заметим, что из интеграла  $\mathcal{I} = 1$  можно получить дополнительное дифференциальное уравнение в виде полинома второй степени относительно  $U, U'$  с коэффициентами, зависящими от  $V, V', V''$ . В этом случае первое уравнение (26) будет следствием остальных уравнений.

Для многих известных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона характерна простая зависимость переменной  $V$  от  $\tau$ :  $V = a\tau + b$  в случае Гриоли,  $V = a \cos \lambda\tau$  в случаях Стеклова и Горячева,  $V = a \cos \lambda\tau + b$  в случае Ковалевского,  $V = a \cos^{3/2} \lambda\tau$  в случае Чаплыгина и т.д. Это свойство позволяет записать первое уравнение (26) в виде неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$U'' + U = F(\tau).$$

Система уравнений (26) является обобщением *уравнений Н.И. Мерцалова*, полученных при ограничениях  $A_1 = A_2, \mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$ .

*Новая форма уравнений:*

$$\left[ \left( \tau + \frac{1}{2} a_{33}\mu \right) x - g \right] x' + (\mu - x^2)\tau' + b_0 x^2 - \tau - h \Big]^2 - [b_0 x^2 - \tau - h] x^2 b_1 = 0, \quad (28)$$

$$\left[ 1 - \left( \tau + \frac{1}{2} a_{33}\mu \right)^2 \right] x'^2 + 2 \left[ \left( \tau + \frac{1}{2} a_{33}\mu \right) x - g \right] x' \tau' + (\mu - x^2) \tau'^2 + \frac{1}{2} (a_{22} - a_{33}) [b_0 x^2 - \tau - h] = 0, \quad (29)$$

где  $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$  – независимая переменная,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\mu$ , зависимыми переменными являются  $\tau = T - h - a_{33} \mu/2$ ,  $x = A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ , постоянные коэффициенты  $b_0, b_1$  выражаются через компоненты гирационного тензора:

$$b_1 = \frac{1}{2} a_{12}^2 / (a_{33} - a_{22}), \quad b_0 = b_1 + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{33}),$$

а функциональная зависимость  $\mu(t)$  задана дополнительным уравнением

$$\dot{\mu}^2 = 4(\mu - x^2 - g^2) + 8gx \left( \tau + \frac{1}{2} a_{33}\mu \right) - 4\mu \left( \tau + \frac{1}{2} a_{33}\mu \right)^2. \quad (30)$$

Уравнения (28),(29) получены в предположении  $a_{22} \neq a_{33}, \mu \neq \text{const}$ . В работе [22] перечислены все возможные варианты, когда действительная функция времени  $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$  постоянна вдоль какой-либо траектории уравнений

Эйлера–Пуассона (1). Эти случаи суть решение Эйлера ( $\mathbf{r} = 0$ ), равномерные вращения вокруг вертикали, частные решения при условиях Лагранжа ( $a_{22} = a_{33}$ ,  $a_{12} = a_{13} = 0$ ) и Гесса ( $a_{22} = a_{33}$ ,  $a_{13} = 0$ ), соответствующие прецессионным движениям твердого тела. Заметим, что в (28)-(30) использованы фактически те же переменные, что и в уравнениях Гесса (14)-(16).

Введением безразмерных переменных

$$\tilde{\tau} = \tau + \mu_0, \quad \tilde{\mu} = \mu\kappa^2 - \mu_0, \quad \tilde{x} = x\kappa, \quad \tilde{t} = 2t\kappa, \quad \kappa = \sqrt{a_{33}/2}$$

представим уравнения (28)-(30) в форме

$$\begin{aligned} & \left[ ((\tilde{\tau} + \tilde{\mu})\tilde{x} - \tilde{g})\tilde{x}' + (\tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2)\tilde{\tau}' + \tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h} \right]^2 - \\ & - \left( \tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h} \right) \tilde{x}^2\tilde{b}_1 = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - (\tilde{\tau} + \tilde{\mu})^2 \right] \tilde{x}'^2 + 2 \left[ (\tilde{\tau} + \tilde{\mu})\tilde{x} - \tilde{g} \right] \tilde{x}'\tilde{\tau}' + (\tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2)\tilde{\tau}'^2 + \\ & + \left( \tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h} \right) \tilde{b}_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}'^2 = \tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2 - \tilde{g}^2 + 2\tilde{g}\tilde{x}(\tilde{\tau} + \tilde{\mu}) - (\tilde{\mu} + \mu_0)(\tilde{\tau} + \tilde{\mu})^2, \quad (32)$$

где  $\tilde{b}_1 = a_{12}^2 / [(a_{33} - a_{22})a_{33}]$ ,  $\tilde{b}_0 = \tilde{b}_1 + (a_{11} - a_{33})/a_{33}$ ,  $\tilde{b}_2 = (a_{22} - a_{33})/a_{33}$ ,  $\tilde{h} = h - \mu_0$ ,  $\tilde{g} = g\kappa$ . Произвольная постоянная  $\mu_0$ , искусственно введенная в уравнения, позволяет находить степенные по переменной  $\mu + \mu_0$  разложения решений дифференциальных уравнений (28),(29) методом инвариантных соотношений [20] либо методами степенной геометрии [16].

**6. Переменные Андуайе–Депри для специальных осей.** Используем следующие обозначения:  $OXYZ$  – неподвижный триэдр с началом в точке подвеса,  $Oxyz$  – специальные оси, полученные преобразованием (3), (4),  $\Sigma$  – плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента  $\mathbf{M}$  и проходящая через точку закрепления тела. Тогда переменные Андуайе–Депри [23] таковы:  $I_1$  – проекция вектора  $\mathbf{M}$  на подвижную ось  $Ox$ ,  $I_2$  – модуль вектора кинетического момента  $\mathbf{M}$ ,  $I_3$  – проекция вектора  $\mathbf{M}$  на неподвижную ось  $OZ$  (вертикаль),  $\varphi_1$  – угол между осью  $Ox$  и линией пересечения  $\Sigma$  с  $Oyz$ ,  $\varphi_2$  – угол между линиями пересечения  $\Sigma$  с плоскостями  $Oyz$  и  $OXY$ ,  $\varphi_3$  – угол между осью  $OX$  и линией пересечения  $\Sigma$  с  $OXY$ . Сопряженные с  $I_1, I_2, I_3$  переменные  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  являются углами, изменяющимися по модулю  $2\pi$ . Зависимость фазовых переменных от канонических переменных Андуайе–Депри выражена следующими формулами:

$$\mathcal{M}_1 = I_1, \quad \mathcal{M}_2 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \quad \mathcal{M}_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \eta \cos \zeta - \sin \eta \sin \zeta \cos \varphi_2, \\ \nu_2 &= (\sin \eta \cos \zeta + \cos \eta \sin \zeta \cos \varphi_2) \sin \varphi_1 + \sin \zeta \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \nu_3 &= (\sin \eta \cos \zeta + \cos \eta \sin \zeta \cos \varphi_2) \cos \varphi_1 - \sin \zeta \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\cos \eta = I_1/I_2$ ,  $\cos \zeta = I_3/I_2$ . Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{M}_1, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_3), \quad I_3 = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ I_2 &= |\mathbf{M}|, \quad \varphi_2 = \arcsin \left( \frac{(\mathcal{M}_3 \nu_2 - \mathcal{M}_2 \nu_3) |\mathbf{M}|}{\sqrt{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2} |\mathbf{M} \times \boldsymbol{\nu}|} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Соотношения (34) могут быть записаны в векторной форме [24]

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{M} \frac{I_3}{I_2^2} + (\mathbf{M} \times \mathbf{r}) \frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \sin \varphi_2 + \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{r}) \frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2^2 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \cos \varphi_2. \quad (36)$$

Гамильтониан рассматриваемой механической системы является функцией переменных Андуайе–Депри

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} a_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} (I_2^2 - I_1^2) \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} a_{33} (I_2^2 - I_1^2) \cos^2 \varphi_1 + \\ &+ a_{12} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1 + a_{13} I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1 - \frac{I_1 I_3}{I_2^2} + \\ &+ \frac{1}{I_2^2} \sqrt{I_2^2 - I_3^2} \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Соответствующие (37) уравнения Гамильтона записываются в стандартном виде

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (38)$$

Переменная  $\varphi_3$  является циклической координатой, так как не входит явно в выражение  $\mathcal{H}$ . Из (38) находим

$$I_3 = \text{const}, \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{I_1}{I_2^2} - \frac{I_3 \sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{I_2^2 \sqrt{I_2^2 - I_3^2}} \cos \varphi_2. \quad (39)$$

Уравнения (39) достаточно просто записываются с помощью фазовых переменных:

$$I_3 = g, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{g \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{M}|^2 - g^2} \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{g \nu_1 - \mathcal{M}_1}{|\mathbf{M}|^2 - g^2}.$$

Запишем уравнение Гесса (14) в канонических переменных Андуайе–Депри:

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{M}|^2}{dt} \equiv I_2 \frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2} \sin \varphi_2. \quad (40)$$

Выразим координату  $\varphi_2$  из интеграла энергии  $\mathcal{H}(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2) = h$ , вместо функции  $\mathcal{H}$  запишем новый гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \arccos \left( \frac{1}{2\sqrt{I_2^2 - I_3^2}\sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \{2I_1I_3 + 2I_2^2h - a_{11}I_1^2I_2^2 - \right. \\ \left. - I_2^2(I_2^2 - I_1^2)(a_{22}\sin^2\varphi_1 + a_{33}\cos^2\varphi_1) - \right. \\ \left. - 2I_1I_2^2\sqrt{I_2^2 - I_1^2}(a_{12}\sin\varphi_1 + a_{13}\cos\varphi_1)\} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Гамильтонова система дифференциальных уравнений имеет второй порядок:

$$\frac{dI_1}{dI_2} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\varphi_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{dI_2} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial I_1}. \quad (42)$$

Проинтегрировав систему (42), найдем величины  $I_1, \varphi_1$  как функции от переменной  $I_2$ . Зависимость  $I_2$  от времени  $t$  найдем из уравнения (40), выразив  $\varphi_2$  через  $I_2$  с учетом (41) и решений системы (42).

В развернутом виде правые части уравнений (42) содержат радикалы и тригонометрические функции. Для упрощения уравнений (42) преобразуем переменные  $(I_1, \varphi_1) \rightarrow (u, v)$  по формулам

$$I_1 = I_2 \frac{2u}{1+u^2}, \quad \sqrt{I_2^2 - I_1^2} = I_2 \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{2v}{1+v^2}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{1-v^2}{1+v^2}.$$

Подставим эти выражения в (38), в результате несложных упрощений получим новую форму уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$\begin{aligned} u' I_2 P_1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)} + 2v' I_2^4 P_2 \frac{(1-u^2)^3}{(1+v^2)} + u P_1 = 0, \\ v' = \frac{(1+u^2)(1+v^2)P_1}{I_2(1-u^2)^2\sqrt{F}}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{F}}{2I_2(1+u^2)^2(1+v^2)^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $I_2$  – независимая переменная системы второго порядка,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dI_2$ ,  $u, v$  – две зависимые переменные,  $F(u, v, I_2), P_1(u, v, I_2), P_2(u, v)$  – полиномы следующего вида:

$$F = 4(1-u^4)^2(1+v^2)^4(I_2^2 - I_3^2) - b_1^2,$$

$$P_1 = b_3 I_2^3 - 2u(1+u^2)^2(1+v^2)^2 I_2 h - (1+u^2)^3(1+v^2)^2 I_3,$$

$$P_2 = v(1-v^2)(1-u^2)(a_{22} - a_{33}) + u(1-v^4)a_{12} - 2uv(1+v^2)a_{13},$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= I_2^3 b_2 - 2(1+u^2)^2(1+v^2)^2 I_2 h - 4u(1+u^2)(1+v^2)^2 I_3, \\
 b_2 &= 4u^2(1+v^2)^2 a_{11} + 4v^2(1-u^2)^2 a_{22} + (1-v^2)^2(1-u^2)^2 a_{33} + \\
 &\quad + 8uv(1+v^2)(1-u^2) a_{12} + 4u(1-v^4)(1-u^2) a_{13}, \\
 b_3 &= 2u(1+v^2)^2(1+u^4) a_{11} - 4uv^2(1-u^2)^2 a_{22} - u(1-v^2)^2(1-u^2)^2 a_{33} + \\
 &\quad + 2v(1+v^2)(1-u^2)^3 a_{12} + (1-v^4)(1-u^2)^3 a_{13}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (43) могут быть получены из (20), (21) заменой переменных

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2I_2 u}{1+u^2}, \quad \mu = I_2^2, \quad w_0 = \frac{I_2(1-u^2)(2a_{12}v + a_{13} - a_{13}v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \\
 \frac{T_0}{w_0} &= \frac{I_2(a_{22} - a_{33})(1-u^2)(2a_{12}v - a_{13} + a_{13}v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)(a_{12}^2 + a_{13}^2)} + \frac{4I_2 u}{1+u^2}.
 \end{aligned}$$

Введем переменные  $s, \varphi_1, \varphi_2$  по формулам

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s} \sin \varphi_2, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{1}{s} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1, \quad \mathcal{M}_3 = \frac{1}{s} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1. \quad (44)$$

Кинетическую энергию  $T$  найдем из (13), (44). Далее подстановкой выражений (44) в (11) получим следующие уравнения:

$$\begin{cases}
 \varphi_1' = \lambda^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}, & \varphi_2' = -\lambda^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \frac{\sin \varphi_2}{s \cos \varphi_2}, & \frac{ds}{dt} = \lambda, \\
 \lambda = s \cos \varphi_2 \sqrt{s^2 - g^2 s^4 - \Phi^2}, & \Phi = [(T - h) - g s \sin \varphi_2] s / \cos \varphi_2.
 \end{cases} \quad (45)$$

Первые два уравнения (45) образуют замкнутую подсистему второго порядка,  $s$  – независимая переменная,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/ds$ . Проинтегрировав эти уравнения, найдем зависимость  $s(t)$  из третьего уравнения (45). Заметим, что уравнения (45) могут быть получены преобразованием системы (38) либо непосредственной подстановкой сферических координат (44) в уравнения П.В. Харламова (7)–(9).

Уравнения (21), (28), (29), (45) получены И.Н. Гашененко, они впервые публикуются в этой работе. Проблемы понижения порядка уравнений движения тяжелого гиригстата вокруг неподвижной точки будут рассмотрены в отдельной статье.

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// *Math. Ann.* – 1890. – **37**. – S. 153–181.
2. *Шифф П.А.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// *Мат. сборник.* – 1903. – **24**, вып. 2. – С. 169–177.
3. *Сретенский Л.Н.* О работах С.А. Чаплыгина по теоретической механике. – В кн.: Чаплыгин С.А. Собр. соч. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 3. – С. 366–376.

4. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt// *Math. Ann.* – 1908. – **65**. – S. 528–537.
5. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки// В кн.: Сб. статей, посвященных проф. Г.К. Суслову. – Киев, 1911. – С. 23–74.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения твердого тела, имеющего неподвижную точку// *Прикл. матем. и механика.* – 1963. – **27**, вып. 4. – С. 703–707.
7. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
8. *Stäckel P.* Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels// *Math. Ann.* – 1909. – **67**. – S. 399–432.
9. *Харламова Е.И.* О канонических уравнениях движения тела, имеющего неподвижную точку// *Механика твердого тела.* – 1969. – Вып. 1. – С. 102–107.
10. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению// Там же. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.
11. *Яхья Х.М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки// *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* – 1976. – № 6. – С. 76–79.
12. *Yehia H.M.* On the reduction of the order of equations of motion of a gyrostat in an axisymmetric field// *J. de Mécanique théor. et appl.* – 1983. – **2**, № 3. – P. 451–462.
13. *Колосов Г.В.* О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. – СПб, 1903. – 76 с.
14. *Харламов М.П.* Понижение порядка в механических системах с симметрией// *Механика твердого тела.* – 1976. – Вып. 8. – С. 4–18.
15. *Мозалевская Г.В., Харламова Е.И.* Уравнения динамики твердого тела в переменных С.А. Чаплыгина// Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 9–20.
16. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии// Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 3–15.
17. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Конечные решения уравнений Н. Ковалевского// Там же. – 2005. – Вып. 35. – С. 31–37.
18. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи// *Прикл. матем. и механика.* – 1966. – **30**, вып. 4. – С. 784–788.
19. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* О преобразовании интегродифференциального уравнения задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// *Механика твердого тела.* – 1971. – Вып. 3. – С. 12–16.
20. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
21. *Докшевич А.И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// *Прикл. механика.* – 1968. – **4**, вып. 11. – С. 95–100.
22. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случай постоянства модуля момента количества движения гиростата// *Механика твердого тела.* – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
23. *Депри А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости// *Механика. Сб. переводов.* – 1968. – № 2. – С. 3–9.
24. *Гашененко И.Н.* Изоэнергетические поверхности в задаче о движении тела с неподвижной точкой// *Механика твердого тела.* – 2006. – Вып. 36. – С. 3–12.