Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 1997

МЕХАНІКА

УДК 531.38

И.Н. Гашененко

Бифуркационное множество в задаче о движении тяжелого гиростата при условиях Ковалевской

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П.В. Харламовым)

A structure of integral manifolds is considered, and an analytic description of a bifurcation set in the case of integrability, which generalizes the classical Kovalevskaya's solution, is given.

Рассмотрим задачу о движении тяжелого гиростата, подчиненного следующим условиям [1, 2]: главные моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A = B = 2C$, центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Уравнения движения

$$\begin{aligned} &2\dot{p} = (r-\lambda)q, \qquad 2\dot{q} = -(r-\lambda)p - \nu_3, \qquad \dot{r} = \nu_2, \\ &\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2 \end{aligned} \tag{1}$$

имеют интегралы [3]

$$\begin{aligned} &H = p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 = h, \\ &K = (\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 + 2\lambda\Big[(r-\lambda)(p^2+q^2) + 2p\nu_3\Big] = k, \\ &L = 2(p\nu_1 + q\nu_2) + (r+\lambda)\nu_3 = l, \\ &I = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Постоянная λ характеризует величину гиростатического момента. При $\lambda = 0$ получаем классическое решение С.В. Ковалевской [1]. Тогда случаям зависимости интегралов (2) отвечают классы Аппельрота [4]. Полное описание интегральных многообразий и их бифуркаций для решения Ковалевской дано в работе [5].

Без ограничения общности можно считать, что $l \geq 0$, $\lambda > 0$. Зафиксируем произвольное значение λ. Двумерная поверхность уровня

$$J_{h,k,l} = \{H = h, K = k, L = l\} \subset M = S^2 \times \mathbf{R}^3$$

инвариантна относительно фазового потока (1). Ее топологический тип меняется только на бифуркационном множестве Σ_λ, состоящем из точек $(h, k, l) \in \mathbf{R}^3$, над которыми отображение

$$J = H \times K \times L \; : \; M \to \mathbf{R}^3 \tag{3}$$

не является локально–тривиальным. По теореме Лиувилля многообразие $J_{h,k,l}$ для $(h, k, l) \in \mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$ – есть объединение двумерных торов.

В нашей задаче множество Σ_λ совпадает с множеством критических значений отображения (3). Поэтому для нахождения Σ_λ используем следующее условие на ранг матрицы Якоби D функций (2):

$$\operatorname{rank} D < 4. \tag{4}$$

Пусть

$$q = 0, \tag{5}$$

тогда условие (4) выполняется только в двух случаях:

$$(r - \lambda)p + \nu_3 = 0, \tag{6}$$

$$\nu_2 = \frac{D(H, K, L, I)}{D(p, r, \nu_1, \nu_3)} = 0. \tag{7}$$

Из (2), (5), (6) находим, что полином $R(p) = -p^4 + p^2(2h - \lambda^2) + 2lp + 1 - k$ имеет кратный корень:

$$R(p) = R'(p) = 0. \tag{8}$$

Случай (8) исследован в работе [6], где уравнения (1) сведены к эллиптическим квадратурам и классифицированы возможные типы движений гиростата.

Из (2), (5), (7) следует, что величина $u = p^2 + \lambda r + \nu_1$ является кратным корнем полинома $F(u) = (u^2 - 2\lambda^2 h - k)^2 - 8\lambda^2 u + 4\lambda^2(l^2 - 2h - \lambda^2)$:

$$F(u) = F'(u) = 0. \tag{9}$$

В предположении $q \neq 0$ условие (4) выполняется только, если величина

$$u = \lambda(r - \lambda) + \left[(\nu_1 + p^2 - q^2 + \lambda^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 + 4\lambda^2 q^2\right]^{1/2} \tag{10}$$

удовлетворяет равенствам (9). Непосредственно из (2), (4) получаем инвариантные соотношения, указанные в работе [2] для частного решения системы (1). Итак, в множество Σ_λ входит та часть поверхности (9), которая отвечает действительным решениям П.В. Харламова [2].

Теорема. *Бифуркационное множество $\Sigma_\lambda \subset \mathbf{R}^3$ является подмножеством объединения поверхностей, задаваемых уравнениями (8), (9).*

Поверхность (9) в $\mathbf{R}^3(h, k, l)$ состоит из двух непересекающихся компонент (им соответствуют значения $u < 0$ и $u > 0$). Если $u > 0$, то в точке (h, k, l), удовлетворяющей (9),

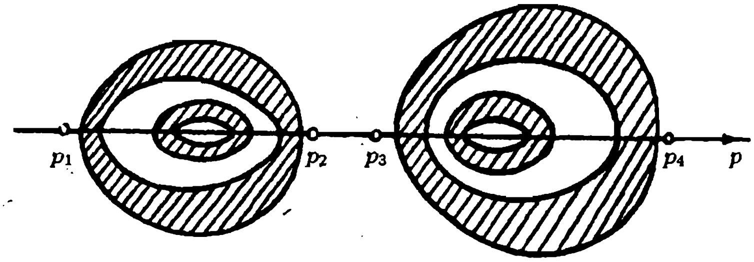

Рис.1.

существуют лишь изолированные решения типа [2]. При $u < 0$ на множестве (9) существуют асимптотические, периодические и квазипериодические решения уравнений (1).

При любом значении λ множество Σ_λ делит $\mathbf{R}^3(h,k,l)$ на области, внутри которых топологический тип $J_{h,k,l}$ не меняется. Установим число торов в каждой связной компоненте $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$. Известно [5], что при $\lambda = 0$ множество $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_0$ состоит из пяти областей (1–5 в табл.1), в которых интегральные многообразия не пусты. Такое разбиение $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$ сохраняется для всех $\lambda \in (0, 2^{-3/4})$, т.е. непрерывная деформация этих областей не влияет на соответствующие типы многообразий $J_{h,k,l}(\lambda)$. При $\lambda > 2^{-3/4}$ область 5 вырождается, но множество $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$ снова состоит из пяти связных компонент (см. табл.1, области 1–4, 6).

Таблица 1.

Область в $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$	1	2	3	4	5	6
$J_{h,k,l}$	$\mathbb{T}^2$	$2\mathbb{T}^2$	$2\mathbb{T}^2$	$2\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{T}^2$

Строение интегральных многообразий изучено с помощью их проекций на экваториальную плоскость эллипсоида инерции. Например, для области 6 множества $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\lambda$ образ $J_{h,k,l}$ показан на рис.1 (ось q вертикальна, p_i – вещественные корни полинома $R(p)$, $\lambda = 1,31$). В каждую внутреннюю точку заштрихованных областей проектируются точки многообразия $J_{h,k,l}$, состоящего из четырех инвариантных торов.

1. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.

2. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 3. – С. 57–64.

3. *Яхья Х.М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. – 1987. – N 4. – С. 88–90.

4. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С.В. Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 61–155.

5. *Харламов М.П.* Бифуркация совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. мат. и мех. – 1983. – **47**, вып. 6. – С. 922–930.

6. *Гашененко И.Н.* Новый класс движений тяжелого гиростата // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, N 1. – С. 66–68.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 25.10.95