УДК 517.5

©2005. **Е.А. Севостьянов**

О ЗАМКНУТОСТИ СЕМЕЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является предметом многочисленных работ ведущих специалистов по теории отображений, см., напр., [1]-[10]. Доказана замкнутость класса ACL гомеоморфизмов с конечным метрическим искажением при минимальных условиях на внешние дилатации прямых и обратных отображений. В работе также получены теоремы компактности семейств пространственных отображений.

1. Введение. Отображения с конечным искажением длины были введены в работе [15]. Здесь же были введены отображения с конечным метрическим искажением.

Отображения с конечным искажением длины в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, представляют собой значительно более широкий класс отображений, чем непостоянные квазирегулярные отображения. Например, любой гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$ с $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$ является отображением с конечным искажением длины, см. Теорему 4.6 в работе [15]. В частности, если $f \in W_{loc}^{1,n}$ и его внешняя дилатация локально интегрируема в степени $n-1$, то $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$ и, следовательно, f – отображение конечного искажения длины, см. [3]. Всё сказанное выше относится и к отображениям конечного метрического искажения, поскольку они, по определению, включают в себя отображения конечного искажения длины.

Напомним некоторые определения и обозначения. Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$. Положим

$$L\,(x,\varphi) \;=\; \limsup_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi\,(x)-\varphi\,(y)\,|}{|y-x|}\,,$$

$$l\,(x,\varphi) \;=\; \liminf_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi\,(x)-\varphi\,(y)\,|}{|y-x|}\,.$$

Непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется отображением с **конечным метрическим искажением,** $f \in FMD$, если f обладает $(N)-$свойством Лузина и для п.в. $x \in D$

$$0 \,<\, l\,(x,f) \,\leq\, L\,(x,f) \,<\, \infty\,.$$

Это эквивалентно тому, что f дифференцируемо п.в. и обладает $(N)-$ и $(N^{-1})-$ свойствами, см. Следствие 3.14 в работе [15].

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ между измеримыми пространствами (X,Σ,μ) и (X',Σ',μ') обладает **(N) – свойством,** если $\mu'\,(f\,(S)) = 0$ как только $\mu\,(S) = 0$. Аналогично, f имеет $\mathbf{(N)}^{-1}$ **– свойство**, если $\mu\,(S) = 0$ как только $\mu'\,(f\,(S)) = 0$.

Напомним также, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых Γ в области D, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in adm\,\Gamma$. **Модуль** семейства Γ есть величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \quad dm(x)\,.$$

Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является Q-гомеоморфизмом, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \quad dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\Gamma$.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n-$локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\mid_{[t_0,\,t]}$ кривой γ если $t > t_0$ и $-l\left(\gamma\mid_{[t_0,\,t]}\right)$ если $t < t_0, t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n-$непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что

$$L_{\gamma,\,g}\left(l_\gamma\left(t\right)\right) \,=\, l_{\widetilde{\gamma}}\left(t\right) \quad \forall\ t \in \Delta\ .$$

Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает $(L)-$**свойством**, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает $N-$свойством;

(L_2) для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f\left(D\right)$ каждое **поднятие** γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает $N^{-1}-$свойством.

Кривая $\gamma \in D$ называется **поднятием кривой** $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ **при отображении** $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n, n \geq 2$, является **отображением с конечным искажением длины**, $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает $(L)-$свойством.

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п.в.), пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| \;=\; \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$$

– **матричная норма** $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l\left(f'(x)\right) \;=\; \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}\ .$$

Напомним, что **внешняя дилатация** отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) \;=\; \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}\ ,$$

если $J(x,f)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f)\ =\ \frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}\ ,$$

если $J(x,f)\neq 0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Максимальная дилатация определяется как

$$K(x,f)\ =\ \max\{K_0(x,f),K_I(x,f)\}\,.$$

Известно, см., напр., 1.2.1 в [18], что

$$K_I\left(x,f\right)\ \le\ K_0^{n-1}\left(x,f\right)\ ,$$
$$K_0\left(x,f\right)\ \le\ K_I^{n-1}\left(x,f\right)\ .$$

2. О замкнутости класса отображений с конечным искажением длины.

Лемма 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n\ \ge\ 2$, $f\ :\ D\ \to\ \mathbb{R}^n-\ ACL$ гомеоморфизм конечного метрического искажения и пусть выполнены условия:

$$K_0\left(x,f\right)\ \le\ K(x)\ \in L_{loc}^{n-1}\ , \tag{1}$$

$$K_0\left(x,f^{-1}\right)\ \le\ Q(x)\ \in L_{loc}^{n-1}\ . \tag{2}$$

Тогда $f\ \in\ W_{loc}^{1,n}(D)$, и $g\ =\ f^{-1}\ \in\ W_{loc}^{1,n}\left(f\left(D\right)\right)$. Более точно, для любого компакта $C\subset D$:

$$\int\limits_{C}\|f'(x)\|^n\ dx\ \le\ \int\limits_{f(C)}Q^{n-1}(y)\,dy \tag{3}$$

$$\int\limits_{f(C)}\|g'(y)\|^n\ dy\ \le\ \int\limits_{C}K^{n-1}(x)\,dx\,. \tag{4}$$

В частности, $f-$ отображение конечного искажения длины.

Замечание 1. Заключение Леммы 1 остаётся справедливым, если вместо условия $f\in ACL$ потребовать, чтобы $f^{-1}\in ACL$.

Доказательство Леммы 1. Пусть $C-$ произвольный компакт в D. Условие $f\ \in FMD$ эквивалентно тому, что отображение f дифференцируемо п.в. с $J(x,f)\neq 0$ и отображение f^{-1} дифференцируемо п.в. с $J\left(x,f^{-1}\right)\neq 0$, см. Предложение 3.7 (i) и Следствие 3.14 в [15]. Тогда п.в. в D

$$f'\left(x\right)\ =\ \left({f^{-1}}'\left(f\left(x\right)\right)\right)^{-1} \tag{5}$$

и, кроме того, справедлива формула замены переменных в интеграле, см. Предложение 3.7 (iii) в [15]. Таким образом, будем иметь:

$$\int\limits_{C}\|f'(x)\|^n\,dx\ =\ \int\limits_{C}\|\left({f^{-1}}'\left(f\left(x\right)\right)\right)^{-1}\|^n\,dx\ =\ \int\limits_{C}\frac{1}{l^n\left({f^{-1}}'\left(f\left(x\right)\right)\right)}\ dx\ =$$

$$= \int\limits_{f(C)} \frac{|J\left(y, f^{-1}\right)|}{l^n\left(f^{-1\prime}\left(y\right)\right)}\, dy \,=\, \int\limits_{f(C)} K_I\left(y, f^{-1}\right)\, dy \,\leq\, \int\limits_{f(C)} Q^{n-1}(y)\, dy \,<\infty\,,$$

и, следовательно, $f \in W_{loc}^{1,n}$, поскольку $f \in ACL$, см., напр., Теорему 2.7.2 в [22], с. 42, или Теорему 2 в 1.1.3 в [23], с. 9. Таким образом, по (1) имеем также, что $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$, см. [3]. Неравенство (4) проверяется аналогично. Лемма доказана. $\Box$

Следствие 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n -$ гомеоморфизм конечного искажения длины и пусть выполнены условия (1) и (2). Тогда f и $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$.

Пусть D и $D'-$ области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $K : D \to [1, \infty]$, $Q : D' \to [1, \infty] -$ измеримые функции. Обозначим через $H_{K,Q}$ класс всех ACL гомеоморфизмов $f : D \to D'$ таких, что

$$K_0\left(x, f\right) \,\leq\, K(x) \;\; \text{п.в.} \tag{6}$$

и

$$K_0\left(y, f^{-1}\right) \,\leq\, Q(y) \;\; \text{п.в.} \tag{7}$$

Теорема 1. Если $K \in L_{loc}^{n-1}(D)$ и $Q \in L_{loc}^{n-1}\left(D'\right)$, то $H_{K,Q} \subset FLD$ и $H_{K,Q}$ образует замкнутое подпространство пространства H всех гомеоморфизмов, наделённого топологией локально равномерной сходимости.

Доказательство. Включение $H_{K,Q} \subset FLD$ есть одно из утверждений Леммы 1. Пусть f_m, $m = 1, 2, \ldots, -$ последовательность гомеоморфизмов класса $H_{K,Q}$, которая сходится при $m \to \infty$ локально равномерно к некоторому гомеоморфизму $f \in H$. По Лемме 1, для любого компакта $C \subset D$ и любого $\varepsilon \in (0, dist\left(f\left(C\right), \partial D'\right))$,

$$\int\limits_{C} \|f_m'(x)\|^n\, dx \,\leq\, \int\limits_{f_m(C)} Q^{n-1}\left(y\right)\, dy \,\leq\, \int\limits_{C_\varepsilon} Q^{n-1}\left(y\right)\, dy$$

где

$$C_\varepsilon \,=\, \{y : dist\left(y, f\left(C\right)\right) \,\leq\, \varepsilon\}.$$

Таким образом, по Лемме 3.5 Главы III в [18], $f \in W_{loc}^{1,n}$, а по Теореме 2 и Замечанию 2 работы [21] $K_0(x, f) \,\leq\, K(x)$ п.в. Поскольку $f_m^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно, то аналогично доказывается, что $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$ и что $K_0\left(x, f^{-1}\right) \,\leq Q(x)$. $\Box$

По Лемме 1 в [21] получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть D и $D'-$ области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f_m : D \to D' -$ последовательность гомеоморфизмов конечного искажения длины, сходящаяся локально равномерно в D к отображению $f : D \to D'$. Если при п.в. $x \in D$ выполнены условия

$$K_0\left(x, f_m\right) \;\leq\; K(x) \in L_{loc}^{n-1}\,, \tag{8}$$

$$K_0\left(x, f_m^{-1}\right) \;\leq\; Q(x) \in L_{loc}^{n-1} \tag{9}$$

при $m = 1, 2, \ldots,$ то либо $f-$ гомеоморфизм конечного искажения длины, удовлетворяющий условиям (6) и (7), либо $f \equiv const$.

3. Теоремы компактности. Пусть $K : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$ и $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty], n \geq 2$ – функции класса L_{loc}^{n-1}. Обозначим через $\Re_{K,Q}$ класс всех ACL гомеоморфизмов $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нормировками $f(0) = 0\,, f\left(I\right) = I$, где $I = (1, 0, \ldots, 0)$ и таких что

$$K_0\left(x, f\right) \,\leq\, K\left(x\right)\,,$$

$$K_0\left(x, f^{-1}\right) \leq Q\left(x\right).$$

Везде ниже компактность понимается относительно локально равномерной сходимости в $\mathbb{R}^n$.

Мы говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание** в точке $x_0 \in D$, $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi_\varepsilon}| \ \ dm(x) < \infty\,, \tag{10}$$

где $\overline{\varphi_\varepsilon}$ обозначает среднее интегральное значение φ над шаром $B(x_0, \varepsilon)$, Мы также говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ **конечного среднего колебания в области** D, $\varphi \in FMO(D)$, или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$. FMO является естественным обобщением BMO, класса функций ограниченного среднего колебания по Джону-Ниренбергу, см. [24] .

Используя Теорему 1 и соответствующие критерии нормальности работы [20], получаем следующие теоремы.

Теорема 2. Класс $\Re_{K,Q}$ компактен, если $K(x) \in FMO$ в D.

Следствие 3. Класс $\Re_{K,Q}$ компактен, если каждая точка области D является точкой Лебега для функции $K(x)$.

Теорема 3. Класс $\Re_{K,Q}$ компактен, если в каждой точке области D выполнено условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} K(x) \ \ dm(x) < \infty\,. \tag{11}$$

Обозначим через q_{x_0} среднее интегральное значение функции $K(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$.

Теорема 4. Класс $\Re_{K,Q}$ компактен, если условие расходимости интеграла

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\beta}(r)} = \infty \tag{12}$$

при некотором $\beta \geq 1/(n-1)$ и, в частности, при $\beta = 1$ выполнено в каждой точке $x_0 \in D$.

Теорема 5. Класс $\Re_{K,Q}$ компактен, если $K(x)$ имеет в каждой точке области D логарифмические особенности порядка не выше, чем $n - 1$.

1. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion, Math. Ann. 317 (2000), 703-726.
2. *Gehring F.W. and Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), 253-264.
3. *Heinonen J. and Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations, Arch. Rat. Mech. Anal. 125 (1993), 81-97.
4. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: compactness, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27, no. 2 (2002), 391-417.
5. *Iwaniec T., Koskela P. and Oninen J.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity, Invent. Math. 144, no.3 (2001), 507-531.

6. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 181-188.
7. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openess, Arch. Rat.Mech. Anal. 160 (2001), 135-151.
8. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N, Michigan Math. J. 49 (2001), 169-181.
9. *Manfredi J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions, Bull. Amer. Math Soc. 32, no.2 (1995), 235-240.
10. *Manfredi J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem, Indiana.Univ.Math. J. 47, no.3 (1998), 1131-1145.
11. *Решетняк Ю.Г.* Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду, Матем. сб. т.75, 3 (1968), 323-334.
12. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
13. *Решетняк Ю.Г.* Геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 886-919.
14. *Пономарёв С.П.* $(N^{-1})-$свойство отображений и $(N)-$условие Лузина, Матем. заметки 58 (1995), 411-418.
15. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion, J. D. Anal. Math., 93 (2004), 215-236.
16. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Q-homeomorphisms, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., 30, no.1 (2005), 49-69.
17. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966.
18. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.– Новосибирск: Наука, 1982.
19. *Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space qusiregular mappings, Forum Math. 10 (1998), 353-375.
20. *Ryazanov V. and Sevost'yanov E.* On normal families of $Q-$homeomorphisms, Труды ИПММ НАН Украины 9(2004), 161-176.
21. *Севостьянов Е.А.* О теоремах сходимости отображений с конечным искажением длины, Труды ИПММ НАН Украины, вып. 10 (в печати)
22. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977.
23. *Maz'ja V.G.* Sobolev Spaces.– Berlin etc.: Springer, 1985.
24. *John F., and Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua
sevostyanov@skif.net

Получено 14.06.05