Современная математика. Фундаментальные направления. Том 16 (2006). С. 47–67

УДК 517.9

АПРИОРНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КОЭРЦИТИВНОСТЬЮ И L^1-ДАННЫМИ

© 2006 г. **А. А. КОВАЛЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе рассматривается задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения общего дивергентного вида второго порядка с правой частью из L^1. Предполагается, что старшие коэффициенты уравнения удовлетворяют условию вырождающейся коэрцитивности. Основные результаты касаются априорных свойств суммируемости и некоторых оценок энтропийных решений рассматриваемой задачи.

1. Введение

В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

где Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f \in L^1(\Omega)$. Предполагается, что старшие коэффициенты уравнения имеют произвольный рост по u, рост порядка $p-1$ с $p \in (1, n)$ относительно ∇u и удовлетворяют условиям вырождающейся коэрцитивности и строгой монотонности. Результаты статьи в основном касаются априорных свойств энтропийных решений рассматриваемой задачи. Для этих результатов никакие ограничения на рост и знак младшего коэффициента не требуются. Только в формулируемой в конце работы теореме существования относительно функции a_0 предполагается условие, допускающее рост $a_0(x, u, \nabla u)$ порядка $\sigma \in (0, p-1)$ по u и порядка p по ∇u. При этом никакая знакоопределенность младшего коэффициента не нужна.

Изучению разрешимости и свойств решений задачи Дирихле для уравнений вида (1.1) с правыми частями из пространства $L^1(\Omega)$ или класса мер Радона посвящена довольно обширная литература (см., например, [2, 4–8, 10–14, 16]). Однако заметим, что налагаемые в этих и других работах условия на коэффициенты уравнений не охватывают общности предположений, сделанных в настоящей работе. Более того, насколько автору известно, основные результаты статьи являются новыми не только в данной общей постановке, но и в частных случаях, рассматривавшихся ранее.

Структура работы такова. В разделе 2 приводятся необходимые в дальнейшем определения и результаты относительно элементов специального функционального множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, введенного в [7] в связи с изучением уравнений второго порядка с правыми частями из L^1. В разделе 3 даются постановка рассматриваемой задачи Дирихле и определения различных типов ее решений. Здесь также описывается связь между типами решений и доказывается один результат о суммируемости энтропийных решений. В целом же априорные свойства суммируемости и некоторые оценки энтропийных решений устанавливаются в разделе 4. В разделе 5 формулируется теорема о существовании энтропийных решений и, наконец, в разделе 6 дается краткий библиографический комментарий к изложенному материалу.

Отметим, что основные результаты статьи анонсированы в заметке [15].

2. Множество функций $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$.

Пусть для любого $k > 0$ T_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Известно, что если $\lambda \geqslant 1$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{2.1}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Заметим, что любая функция из множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ измерима. Действительно, если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то измеримость функции u следует из измеримости функций $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и поточечной сходимости последовательности $\{T_k(u)\}$ к u.

Очевидно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega). \tag{2.2}$$

Для произвольных $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим $k(u,x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l\}$.

Определение 2.1. Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta_i u\,(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)\,(x). \tag{2.3}$$

Предложение 2.1. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда для любого* $k > 0$ *имеем*

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{2.4}$$

Доказательство этого предложения простое. Оно использует определение функций T_k и определение 2.1.

Из предложения 2.1 следует, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место $D_i T_k(u) \to \delta_i u$ п.в. на Ω. Отсюда заключаем, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то функции $\delta_i u$, $i = 1, \ldots, n$, измеримы.

Заметим еще, что из (2.1), (2.2) и предложения 2.1 следует, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω. Более того, из (2.1) и предложения 2.1 вытекает, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω.

Определение 2.2. Если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $(\delta u\,(x))_i = \delta_i u\,(x)$.

Предложение 2.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$ *и* $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ *и для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *имеем* $D_i u = \delta_i u$ *п. в. на* Ω.

Доказательство этого предложения основывается на использовании предложения 2.1 и неравенства Соболева для функций из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$, $\lambda \in [1, n)$.

Предложение 2.3. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *и* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Тогда*:

1) $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$;
2) *если* $k > 0$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $D_i T_k(u - v) = \delta_i u - \delta_i v$ *п. в. на* $\{|u - v| < k\}$.

Доказательство. Ясно, что существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \backslash E$ имеем

$$|v(x)| \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Зафиксируем произвольное $k > 0$, и пусть $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$u_j = T_j(u) - v. \tag{2.6}$$

Пусть теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant k_1$, и $x \in \{|u_j| < k\} \backslash E$. Тогда

$$|T_j(u(x)) - v(x)| < k. \tag{2.7}$$

Если $|u(x)| > j$, то в силу (2.5) и (2.7) имеем

$$j = |T_j(u(x))| \leqslant |T_j(u(x)) - v(x)| + |v(x)| < k_1.$$

Следовательно, $j < k_1$, что противоречит первоначальному предположению относительно j. Значит, $|u(x)| \leqslant j$. Тогда из (2.7) вытекает, что $|u(x) - v(x)| < k$. Отсюда и из (2.5) следует неравенство $|u(x)| < k_1$. Тогда, ввиду (2.6),

$$u_j(x) = T_j(u(x)) - v(x) = u(x) - v(x) = T_{k_1}(u(x)) - v(x).$$

Таким образом,

$$u_j = T_{k_1}(u) - v \quad \text{п. в. на} \;\; \{|u_j| < k\}.$$

Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$D_i u_j = D_i T_{k_1}(u) - D_i v \quad \text{п. в. на} \;\; \{|u_j| < k\}.$$

Теперь можно заключить, что последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из того, что $T_k(u_j) \to T_k(u - v)$ сильно в $L^p(\Omega)$, выводим включение $T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу произвольности $k > 0$ получаем $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$. Тем самым утверждение 1) доказано.

Далее, пусть $k > 0$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу (2.5) имеем

$$\{|u - v| < k\} \backslash E \subset \{|u| < k_1\}. \tag{2.8}$$

Тогда

$$T_k(u - v) = T_{k_1}(u) - v \quad \text{п. в. на } \{|u - v| < k\}.$$

Следовательно,

$$D_i T_k(u - v) = D_i T_{k_1}(u) - D_i v \quad \text{п. в. на } \{|u - v| < k\}. \tag{2.9}$$

Кроме того, в силу предложения 2.1 и (2.8) имеем

$$D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u \quad \text{п. в. на } \{|u - v| < k\}.$$

Отсюда и из (2.9) выводим, что

$$D_i T_k(u - v) = \delta_i u - \delta_i v \quad \text{п. в. на} \;\; \{|u - v| < k\},$$

и тем самым справедливость утверждения 2) установлена. □

Пример 2.1. Пусть $y \in \Omega$, $\rho > 0$, и пусть B_1 и B_2 — замкнутые шары с центром в точке y и радиусами ρ и $\rho/2$ соответственно. Предположим, что $B_1 \subset \Omega$, и пусть $\varphi \in C^1(\Omega)$, причем $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ в Ω, $\varphi = 1$ в B_2 и $\varphi = 0$ на $\Omega \backslash B_1$. Пусть $\lambda \geqslant n$ и u — функция на Ω такая, что

$$u(x) = \begin{cases} |x - y|^{-\lambda}\, \varphi(x), & \text{если} \quad x \in \Omega \backslash \{y\}, \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

Тогда $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega) \setminus L^1(\Omega)$.

Из этого примера и включения (2.2) вытекает, что множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ шире пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Приведем теперь один общий результат о суммируемости функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеется квалифицированная оценка мер множеств $\{|u| \geqslant k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Этот результат понадобится для установления свойств суммируемости элементов множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих некоторому семейству интегральных оценок.

Лемма 2.1. *Пусть u — измеримая функция на Ω, $M>0$, $\gamma>0$, и пусть для любого $k\in\mathbb{N}$*
$$\operatorname{meas}\{|u|\geqslant k\}\leqslant Mk^{-\gamma}. \tag{2.10}$$
Тогда для любого $\lambda\in(0,\gamma)$ имеем $u\in L^\lambda(\Omega)$ и
$$\int\limits_\Omega |u|^\lambda\,dx\leqslant 2^{\gamma+(\gamma+\lambda)/(\gamma-\lambda)}M+\operatorname{meas}\Omega. \tag{2.11}$$

Доказательство. Зафиксируем $\lambda\in(0,\gamma)$ и положим $\lambda_1=2/(\gamma-\lambda)$. В силу (2.10) для любого $k\in\mathbb{N}$ имеем
$$\int\limits_{\{k^{\lambda_1}\leqslant|u|<(k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda\,dx\leqslant 2^{\gamma+\lambda_1\lambda}Mk^{-2}.$$
Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u\in L^\lambda(\Omega)$ и верна оценка (2.11). □

Далее, положим $p^*=np/(n-p)$. Напомним (см., например, [1]), что $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $c_{n,p}$, зависящая только от n и p, такая, что для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$
$$\biggl(\int\limits_\Omega |u|^{p^*}\,dx\biggr)^{1/p^*}\leqslant c_{n,p}\biggl(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\,dx\biggr)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *Пусть $u\in\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $M\geqslant 1$ и $0<\theta<p$. Пусть для любого $k\geqslant 1$ справедливо неравенство*
$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx\leqslant Mk^\theta. \tag{2.13}$$
Тогда для любого $k\geqslant 1$ имеем
$$\operatorname{meas}\{|u|\geqslant k\}\leqslant c_{n,p}^{p^*}M^{n/(n-p)}\,k^{-n(p-\theta)/(n-p)}, \tag{2.14}$$
$$\operatorname{meas}\{|\delta u|\geqslant k\}\leqslant (c_{n,p}^{p^*}+1)M^{n/(n-\theta)}\,k^{-n(p-\theta)/(n-\theta)}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $k\geqslant 1$. Имеем $T_k(u)\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу (2.12), предложения 2.1 и (2.13) имеем
$$\int\limits_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\,dx\leqslant c_{n,p}^{p^*}\biggl(\int\limits_{\{|u|<k\}}|\delta u|^p\,dx\biggr)^{p^*/p}\leqslant c_{n,p}^{p^*}M^{n/(n-p)}\,k^{\theta n/(n-p)}. \tag{2.16}$$
Так как $|T_k(s)|=k$ для $s\in\mathbb{R}$, $|s|\geqslant k$, то
$$k^{p^*}\operatorname{meas}\{|u|\geqslant k\}\leqslant\int\limits_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\,dx.$$
Отсюда и из (2.16) выводим неравенство (2.14).

Далее, положим
$$k_1=M^{1/(n-\theta)}\,k^{(n-p)/(n-\theta)}.$$
Так как $k_1\geqslant 1$, то аналогично (2.14) имеем
$$\operatorname{meas}\{|u|\geqslant k_1\}\leqslant c_{n,p}^{p^*}M^{n/(n-p)}\,k_1^{-n(p-\theta)/(n-p)}. \tag{2.17}$$
Кроме того, в силу (2.13)
$$\int\limits_{\{|u|<k_1\}}|\delta u|^p\,dx\leqslant Mk_1^\theta. \tag{2.18}$$
Ясно, что
$$\operatorname{meas}\{|\delta u|\geqslant k\}\leqslant\operatorname{meas}\{|u|\geqslant k_1\}+\operatorname{meas}\{|u|<k_1,\,|\delta u|\geqslant k\}. \tag{2.19}$$

Если $x \in \{|u| < k_1,\, |\delta u| \geqslant k\}$, то $k \leqslant |\delta u|\,(x)$ и, следовательно, учитывая (2.18), получаем

$$k^p \operatorname{meas}\{|u| < k_1, |\delta u| \geqslant k\} \leqslant \int\limits_{\{|u|<k_1\}} |\delta u|^p\, dx \leqslant M k_1^{\theta}.$$

Отсюда и из (2.17), (2.19) следует, что

$$\operatorname{meas}\{|\delta u| \geqslant k\} \leqslant c_{n,p}^{p^*} M^{n/(n-p)}\, k_1^{-n(p-\theta)/(n-p)} + M k^{-p}\, k_1^{\theta}. \tag{2.20}$$

Заметим, что в силу определения k_1

$$M^{n/(n-p)}\, k_1^{-n(p-\theta)/(n-p)} = M^{n/(n-\theta)} k^{-n(p-\theta)/(n-\theta)},$$

$$M k^{-p} k_1^{\theta} = M^{n/(n-\theta)} k^{-n(p-\theta)/(n-\theta)}.$$

Из этих равенств и (2.20) выводим неравенство (2.15). □

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает такой результат.

Лемма 2.3. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $M \geqslant 1$ *и* $0 < \theta < p$. *Пусть для любого* $k \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\, dx \leqslant M k^{\theta}.$$

Пусть $0 < \lambda < n(p-\theta)/(n-\theta)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} |u|^{\lambda(n-\theta)/(n-p)}\, dx \leqslant C_1 M^{n/(n-p)},$$

$$\int\limits_{\Omega} |\delta u|^{\lambda}\, dx \leqslant C_2 M^{n/(n-\theta)},$$

где C_1, C_2 — *положительные постоянные, зависящие только от* $n, p, \operatorname{meas}\Omega$, θ *и* λ.

3. Задача Дирихле для уравнений с L^1-данными. Типы решений и связи между ними

Пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ a_i — функция Каратеодори на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для любого $k > 0$ существуют $\overline{c}_k > 0$ и $\overline{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\overline{g}_k \geqslant 0$ на Ω, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant k$, и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,s,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant \overline{c}_k |\xi|^p + \overline{g}_k(x). \tag{3.1}$$

Кроме того, будем считать, что существуют $p_1 \in [0, p-1)$, $p_2 \in [0, p-p_1)$, $c_1, c_2 > 0$ и $g_1 \in L^1(\Omega)$, $g_1 \geqslant 0$ на Ω, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,s,\xi)\xi_i \geqslant \frac{c_1|\xi|^p}{(1+|s|)^{p_1}} - c_2 p_2 (1+|s|)^{p_2} - g_1(x). \tag{3.2}$$

Наконец, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [\, a_i(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{3.3}$$

Пусть a_0 — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $f \in L^1(\Omega)$.

Будем рассматривать следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_i(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Определение 3.1. Слабым решением задачи (3.4), (3.5) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

1) для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ $\quad a_i(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$;
2) $a_0(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$;
3) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \bigg\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\nabla u) D_i v + a_0(x,u,\nabla u) v \bigg\}\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx.$$

Определение 3.2. $\mathcal{T}$-решением задачи (3.4), (3.5) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

1) для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ $\quad a_i(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$;
2) $a_0(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$;
3) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \bigg\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v + a_0(x,u,\delta u) v \bigg\}\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx.$$

Предложение 3.1. *Пусть u — $\mathcal{T}$-решение задачи* (3.4), (3.5) *и пусть* $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. *Тогда u — слабое решение задачи* (3.4), (3.5).

Доказательство. Поскольку $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $|\delta u| \in L^1(\Omega)$, в силу предложения 2.2 $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $D_i u = \delta_i u$ п. в. на Ω. Отсюда и из определения 3.2 вытекает, что выполняются условия 1)–3) определения 3.1. Значит, u — слабое решение задачи (3.4), (3.5). $\square$

Далее, заметим, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1,\dots,n\}$, то функция $a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i v)$ суммируема на множестве $\{|u-v| < k\}$. Это следует из предложения 2.1 и (3.1).

Определение 3.3. Энтропийным решением задачи (3.4), (3.5) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

1) $a_0(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$;
2) для любых $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$

$$\int\limits_{\{|u-v|<k\}} \bigg\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i v) \bigg\}\, dx + \int\limits_\Omega a_0(x,u,\delta u)\, T_k(u-v)\, dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)\, dx.$$

Лемма 3.1. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Тогда для любых $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ справедливо неравенство из условия* 2) *определения* 3.3.

Доказательство леммы основывается на приближении функции из $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ последовательностью гладких равномерно ограниченных в Ω функций, использовании для этих аппроксимирующих функций неравенства из условия 2) определения 3.3 и соответствующем предельном переходе с привлечением неравенства (3.1) и предложений 2.1 и 2.3.

Предложение 3.2. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Тогда*:

1) *для любого λ, $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-p)$, функция $|u|^\lambda$ суммируема на Ω*;
2) *для любого λ, $0 < \lambda < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)$, функция $|\delta u|^\lambda$ суммируема на Ω.*

Доказательство. Положим $\sigma_1 = p_1 p_2/(p-p_2)$. В силу неравенств $p_1 \geqslant 0$ и $0 \leqslant p_2 < p - p_1$ имеем $\sigma_1 \geqslant 0$. Кроме того, имеем

$$\frac{pp_1}{p-p_2} = p_1 + \sigma_1. \tag{3.6}$$

Положим

$$M_1 = \frac{2^{p_1} c_2 p_2}{c_1}, \qquad M_2 = \frac{2^{p_1}}{c_1} \int\limits_\Omega [\, g_1 + |f| + |a_0(x,u,\delta u)|] dx,$$

$$M_3 = 2^{p_2} M_1 \operatorname{meas}\Omega + \big[(2c_{n,p})^{p_2} M_1 (1+\operatorname{meas}\Omega)\big]^{p/(p-p_2)}.$$

Пусть $k \geqslant 1$. В силу определения 3.3 имеем

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\delta u)\delta_i u\Big\}\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} [\,f - a_0(x,u,\delta u)]\,T_k(u)\,dx.$$

Отсюда и из (3.2) следует, что

$$c_1 \int\limits_{\{|u|<k\}} \frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\,dx \leqslant c_2 p_2 \int\limits_{\{|u|<k\}} (1+|u|)^{p_2} dx + \int\limits_{\Omega} g_1\,dx + \int\limits_{\Omega} [\,f - a_0(x,u,\delta u)]\,T_k(u)\,dx.$$

Из этого неравенства, учитывая, что $(1+|u|)^{p_1} \leqslant (2k)^{p_1}$ на $\{|u|<k\}$ и $|T_k(u)| \leqslant k$ на Ω, получаем

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx \leqslant M_1 k^{p_1} \int\limits_{\{|u|<k\}} (1+|u|)^{p_2}\,dx + M_2 k^{p_1+1}. \tag{3.7}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (3.7). Предположим, что $p_2 > 0$. Используя неравенство Гельдера, (2.12), предложение 2.1 и неравенство Юнга, устанавливаем

$$\begin{aligned}
2^{p_2} k^{p_1} M_1 \int\limits_{\Omega} |T_k(u)|^{p_2}\,dx &\leqslant 2^{p_2} k^{p_1} M_1 (\operatorname{meas}\Omega)^{(p^*-p_2)/p^*} \Big(\int\limits_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*}\,dx\Big)^{p_2/p^*} \leqslant \\
&\leqslant 2^{p_2} k^{p_1} M_1 (1+\operatorname{meas}\Omega) c_{n,p}^{p_2} \Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p\,dx\Big)^{p_2/p} = \\
&= (2c_{n,p})^{p_2} M_1 (1+\operatorname{meas}\Omega) k^{p_1} \Big(\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx\Big)^{p_2/p} \leqslant \\
&\leqslant \big[\,(2c_{n,p})^{p_2} M_1 (1+\operatorname{meas}\Omega)\big]^{p/(p-p_2)} k^{p_1 p/(p-p_2)} + \frac{p_2}{p} \int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx.
\end{aligned}$$

Тогда, учитывая (3.6) и то, что $T_k(u) = u$ на $\{|u|<k\}$, получаем

$$M_1 k^{p_1} \int\limits_{\{|u|<k\}} (1+|u|)^{p_2}\,dx \leqslant M_3 k^{p_1+\sigma_1} + \frac{p_2}{p} \int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx. \tag{3.8}$$

Очевидно, что это неравенство верно и в случае $p_2 = 0$. Из (3.7) и (3.8) вытекает, что

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx \leqslant \frac{p}{p-p_2}\big[\,M_3 k^{p_1+\sigma_1} + M_2 k^{p_1+1}\big]. \tag{3.9}$$

Если $\sigma_1 \leqslant 1$, то из (3.9), включения $p_1 \in [0, p-1)$ и леммы 2.3 выводим, что утверждения 1) и 2) справедливы.

Пусть теперь

$$\sigma_1 > 1. \tag{3.10}$$

Тогда в силу неравенств $p_1 \geqslant 0$ и $0 \leqslant p_2 < p - p_1$ имеем

$$\sigma_1 < p_2 \tag{3.11}$$

и, следовательно,

$$p_1 + \sigma_1 < p. \tag{3.12}$$

Из (3.9), (3.10), (3.12) и леммы 2.3 выводим, что

$$\text{для любого } \lambda,\ 0 < \lambda < \frac{n(p-p_1-\sigma_1)}{n-p},\ \text{ функция } |u|^\lambda \text{ суммируема на } \Omega. \tag{3.13}$$

Положим

$$\sigma_j = p_2 - \frac{n(p-p_1-\sigma_{j-1})}{n-p}, \quad j = 2, 3, \ldots. \tag{3.14}$$

Для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем
$$\sigma_j < p_2. \tag{3.15}$$
Докажем это методом индукции. В силу (3.11) неравенство (3.15) верно для $j = 1$. Предположим, что неравенство (3.15) верно для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Используя (3.14) и сделанное предположение, получаем
$$\sigma_{j+1} = p_2 - \frac{n(p - p_1 - \sigma_j)}{n-p} = p_2 - \frac{n(p-p_1)}{n-p} + \frac{n\sigma_j}{n-p} < \\ < p_2 - \frac{n(p-p_1)}{n-p} + \frac{np_2}{n-p} = p_2 - \frac{n(p-p_1-p_2)}{n-p}\,.$$
Отсюда и из неравенства $p_2 < p - p_1$ следует, что неравенство (3.15) верно для $j+1$. Теперь можно заключить, что неравенство (3.15) справедливо для любого $j \in \mathbb{N}$.

Далее, пусть $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$. В силу (3.14) и (3.15) имеем
$$\sigma_j = p_2 - \frac{n(p-p_1)}{n-p} + \frac{n\sigma_{j-1}}{n-p} = \sigma_{j-1} + p_2 - \frac{n(p-p_1)}{n-p} + \frac{p\sigma_{j-1}}{n-p} < \\ < \sigma_{j-1} + p_2 - \frac{n(p-p_1)}{n-p} + \frac{pp_2}{n-p} = \sigma_{j-1} - \frac{n(p-p_1-p_2)}{n-p}\,.$$

Таким образом, для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$, справедливо неравенство
$$\sigma_j < \sigma_{j-1} - \frac{n(p-p_1-p_2)}{n-p}\,. \tag{3.16}$$

Отсюда вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$,
$$\sigma_j < \sigma_1 - (j-1)\,\frac{n(p-p_1-p_2)}{n-p}\,.$$

Следовательно, существуют числа $j \in \mathbb{N}$ такие, что $\sigma_j < 1$. Положим
$$m = \min\{j \in \mathbb{N} : \ \sigma_j < 1\}.$$
Имеем $\sigma_m < 1$. Отсюда и из (3.10) вытекает, что $m \geqslant 2$. Ясно также, что $\sigma_{m-1} \geqslant 1$, и поэтому
$$1 - \sigma_m \leqslant \sigma_{m-1} - \sigma_m\,. \tag{3.17}$$

Положим
$$\alpha = \frac{p_2 - 1}{p - p_1 - p_2}\,. \tag{3.18}$$
В силу (3.10) и (3.11) имеем $\alpha > 0$.

Зафиксируем число ε такое, что
$$0 < \varepsilon < \min\left\{1,\ \frac{1-\sigma_m}{\alpha^m(\sigma_{m-1} - \sigma_m)}\right\}, \tag{3.19}$$
и для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$, положим
$$\beta_j = \sigma_j + \varepsilon\alpha^j(\sigma_{j-1} - \sigma_j). \tag{3.20}$$

Пусть $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m$. Очевидно, что $\varepsilon\alpha^j > 0$. Если $\alpha \leqslant 1$, то, учитывая, что в силу (3.19) $\varepsilon < 1$, имеем $\varepsilon\alpha^j < 1$. Если же $\alpha > 1$, то, используя (3.17) и (3.19), получаем $\varepsilon\alpha^j < \alpha^{j-m} \leqslant 1$. Таким образом, в любом случае $\varepsilon\alpha^j < 1$ и, следовательно, $\varepsilon\alpha^j \in (0,1)$.

Теперь из (3.20) и (3.16) выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m$,
$$\sigma_j < \beta_j < \sigma_{j-1}\,. \tag{3.21}$$

Отсюда и из (3.14) и (3.15) вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m$,
$$0 < p_2 - \beta_j < \frac{n(p - p_1 - \sigma_{j-1})}{n-p}\,. \tag{3.22}$$

В свою очередь, из (3.22) и (3.13) следует, что
$$\text{функция } |u|^{p_2 - \beta_2} \text{ суммируема на } \Omega. \tag{3.23}$$

Покажем, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m$,

$$\text{функция } |u|^{p_2-\beta_j} \text{ суммируема на } \Omega. \tag{3.24}$$

Ясно, что это справедливо, если $m = 2$. Пусть $m > 2$. Воспользуемся методом индукции. В силу (3.23) утверждение (3.24) справедливо для $j = 2$. Предположим, что утверждение (3.24) верно для некоторого $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m-1$. В силу определения числа m имеем

$$\sigma_j \geqslant 1. \tag{3.25}$$

Отсюда и из (3.21) вытекает, что

$$\beta_j > 1. \tag{3.26}$$

Зафиксируем произвольное $k \geqslant 1$. Используя (3.7) и (3.26), получаем

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx \leqslant 2^{p_2} M_1 k^{p_1+\beta_j} \int\limits_{\{|u|<k\}} (1+|u|)^{p_2-\beta_j}\,dx + M_2 k^{p_1+1} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ 2^{p_2} M_1 \int\limits_{\Omega} (1+|u|)^{p_2-\beta_j}\,dx + M_2 \right\} k^{p_1+\beta_j},$$

причем ввиду сделанного предположения интеграл функции $(1+|u|)^{p_2-\beta_j}$ по Ω конечен. Отсюда, учитывая неравенство $0 < p_1 + \beta_j < p$ и применяя лемму 2.3, заключаем, что

$$\text{для любого } \lambda,\ 0 < \lambda < \frac{n(p-p_1-\beta_j)}{n-p},\ \text{функция } |u|^\lambda \text{ суммируема на } \Omega. \tag{3.27}$$

Покажем, что

$$p_2 - \beta_{j+1} < \frac{n(p-p_1-\beta_j)}{n-p}\,. \tag{3.28}$$

Действительно, используя (3.14), получаем, что

$$p_2 - \beta_{j+1} = p_2 - \sigma_{j+1} + \sigma_{j+1} - \beta_{j+1} = \frac{n(p-p_1-\sigma_j)}{n-p} + \sigma_{j+1} - \beta_{j+1} =$$
$$= \frac{n(p-p_1-\beta_j)}{n-p} + \frac{n(\beta_j-\sigma_j)}{n-p} + \sigma_{j+1} - \beta_{j+1}, \tag{3.29}$$

а в силу (3.20) имеем

$$\frac{n(\beta_j-\sigma_j)}{n-p} + \sigma_{j+1} - \beta_{j+1} = \varepsilon\alpha^j \left[\frac{n}{n-p}(\sigma_{j-1}-\sigma_j) - \alpha(\sigma_j - \sigma_{j+1}) \right]. \tag{3.30}$$

Из (3.15) и (3.25) следует, что

$$\sigma_{j-1} - \sigma_j < p_2 - 1. \tag{3.31}$$

Кроме того, в силу (3.16) и (3.18) имеем

$$\frac{n(p_2-1)}{n-p} < \alpha(\sigma_j - \sigma_{j+1}). \tag{3.32}$$

Из (3.29)–(3.32) выводим, что неравенство (3.28) справедливо.

Заметим еще, что $p_2 - \beta_{j+1} > 0$ ввиду (3.22). Учитывая это и (3.28), из (3.27) получаем, что функция $|u|^{p_2-\beta_{j+1}}$ суммируема на Ω. Значит, утверждение (3.24) справедливо для $j+1$.

Теперь можно заключить, что утверждение (3.24) верно для любого $j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant j \leqslant m$.

Отсюда следует, в частности, что функция $|u|^{p_2-\beta_m}$ суммируема на Ω. Кроме того, в силу (3.20) и (3.19) имеем $\beta_m < 1$. Тогда, используя (3.7), устанавливаем, что для любого $k \geqslant 1$

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p\,dx \leqslant \left\{ 2M_1 \int\limits_{\Omega} (1+|u|)^{p_2-\beta_m}\,dx + M_2 \right\} k^{p_1+1}\,.$$

Отсюда, учитывая неравенство $0 < p_1 + 1 < p$ и применяя лемму 2.3, выводим, что утверждения 1) и 2) справедливы. □

Предложение 3.3. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть функция* $(1+|u|)^{p_2}$ *суммируема на* Ω *и для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *имеем* $a_i(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$. Тогда u — $\mathcal{T}$*-решение задачи* (3.4), (3.5).

Доказательство. В силу условий предложения имеем $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и выполняются условия 1) и 2) определения 3.2.

Покажем, что выполняется условие 3) определения 3.2. Пусть $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Зафиксируем $k > \max\limits_{\Omega} |v|$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ положим $E_m = \{\,|u - T_m(u) + v| < k\}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $T_m(u) - v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу леммы 3.1 имеем

$$\int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - D_i T_m(u) + D_i v) \Big\}\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, T_k(u - T_m(u) + v)\, dx. \quad (3.33)$$

Используя предложение 2.1 и неравенство (3.2), получаем

$$\int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - D_i T_m(u) + D_i v) \Big\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \Big\}\, dx + \int\limits_{E_m \cap \{|u| \geqslant m\}} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)\delta_i u \Big\}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \Big\}\, dx - c_2 p_2 \int\limits_{E_m \cap \{|u| \geqslant m\}} (1+|u|)^{p_2}\, dx - \int\limits_{\{|u| \geqslant m\}} g_1\, dx.$$

Отсюда и из (3.33) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \Big\}\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, T_k(u - T_m(u) + v)\, dx +$$

$$+ c_2 p_2 \int\limits_{\{|u| \geqslant m\}} (1+|u|)^{p_2}\, dx + \int\limits_{\{|u| \geqslant m\}} g_1\, dx. \quad (3.34)$$

Ясно, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = \Omega$. Кроме того, для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $E_m \subset E_{m+1}$. Действительно, пусть $m \in \mathbb{N}$ и $x \in E_m$. В случае $|u(x)| \leqslant m+1$ включение $x \in E_{m+1}$ очевидно. Предположим, что $|u(x)| > m+1$. Если при этом $u(x) > 0$, то $u(x) > T_{m+1}(u(x))$. Тогда

$$-k < v(x) < u(x) - T_{m+1}(u(x)) + v(x) = u(x) - T_m(u(x)) - 1 + v(x) < k. \quad (3.35)$$

Если же $u(x) < 0$, то $u(x) < T_{m+1}(u(x))$. Тогда

$$-k < u(x) - T_m(u(x)) + v(x) + 1 = u(x) - T_{m+1}(u(x)) + v(x) < v(x) < k.$$

Отсюда и из (3.35) вытекает, что и в случае $|u(x)| > m+1$ имеем $x \in E_{m+1}$. Следовательно, $E_m \subset E_{m+1}$.

Теперь можно заключить, что $\operatorname{meas}(\Omega \backslash E_m) \to 0$. Тогда, учитывая, что по условию предложения функции $a_i(x,u,\delta u)$ суммируемы на Ω, получаем

$$\int\limits_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \Big\}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \Big\}\, dx. \quad (3.36)$$

Далее, в силу утверждения 1) предложения 3.2 имеем $\operatorname{meas}\{|u| \geqslant m\} \to 0$. Отсюда и из суммируемости функций $(1+|u|)^{p_2}$ и g_1 выводим, что

$$\int\limits_{\{|u| \geqslant m\}} (1+|u|)^{p_2}\, dx \to 0, \qquad \int\limits_{\{|u| \geqslant m\}} g_1\, dx \to 0. \quad (3.37)$$

Наконец, имеем

$$\int\limits_\Omega [\,f - a_0(x,u,\delta u)]\,T_k(u - T_m(u) + v)\,dx \to \int\limits_\Omega [\,f - a_0(x,u,\delta u)]v\,dx. \tag{3.38}$$

Это следует из того, что $T_k(u - T_m(u)+v) \to v$ на Ω и функции f и $a_0(x,u,\delta u)$ суммируемы на Ω.

Из (3.34) и (3.36)–(3.38) выводим, что для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \right\} dx \leqslant \int\limits_\Omega [\,f - a_0(x,u,\delta u)]v\,dx.$$

Следовательно, для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i v \right\} dx = \int\limits_\Omega [\,f - a_0(x,u,\delta u)]v\,dx.$$

Значит, выполняется условие 3) определения 3.2 и можно заключить, что u — $\mathcal{T}$-решение задачи (3.4), (3.5). □

Следствие 3.1. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть функции* $(1+|u|)^{p_2}$ *и* $|\delta u|$ *суммируемы на Ω и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $a_i(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$. Тогда u — слабое решение задачи* (3.4), (3.5).

Этот результат вытекает из предложений 3.3 и 3.1.

Прежде чем перейти к дальнейшим результатам, дадим одно полезное замечание.

Замечание 3.1. Если $p_1 < (p-1)/(n-p+1)$, то

$$1 < \frac{n(p-1-p_1)}{(n-1-p_1)(p-1)}\,. \tag{3.39}$$

Предложение 3.4. *Пусть*

$$p_1 < \frac{p-1}{n-p+1}, \tag{3.40}$$

$$p_2 < \frac{n(p-1-p_1)}{n-p}, \tag{3.41}$$

$0 < \overline{p} < p^*(p-1-p_1)/(p-1)$, $\overline{c} > 0$ *и* $\overline{g} \in L^1(\Omega)$, $\overline{g} \geqslant 0$ *на* Ω. *Пусть для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x,s,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant \overline{c}\,(|s|^{\overline{p}} + |\xi|^p) + \overline{g}(x). \tag{3.42}$$

Пусть u — энтропийное решение задачи (3.4), (3.5). *Тогда*

1) *для любого числа λ, удовлетворяющего неравенству*

$$1 \leqslant \lambda < \min\left\{ \frac{p^*(p-1-p_1)}{\overline{p}(p-1)},\ \frac{n(p-1-p_1)}{(n-1-p_1)(p-1)} \right\}, \tag{3.43}$$

и любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $a_i(x,u,\delta u) \in L^\lambda(\Omega)$;

2) *u — $\mathcal{T}$-решение задачи* (3.4), (3.5).

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (3.40) и замечания 3.1 справедливо неравенство (3.39). Из этого неравенства и условия предложения относительно $\overline{p}$ вытекает, что множество чисел λ, удовлетворяющих неравенству (3.43), непусто.

Пусть число λ удовлетворяет неравенству (3.43) и $i \in \{1,\dots,n\}$. В силу (3.42) и неравенства $\lambda(p-1) < p$ имеем

$$|a_i(x,u,\delta u)|^\lambda \leqslant (\overline{c}+1)\left[|u|^{\lambda(p-1)\overline{p}/p} + |\delta u|^{\lambda(p-1)} \right] + \overline{g} + 1 \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{3.44}$$

Из (3.43) следует, что

$$\lambda(p-1)\overline{p}/p < n(p-1-p_1)/(n-p), \qquad \lambda(p-1) < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1).$$

Тогда в силу предложения 3.2 функции $|u|^{\lambda(p-1)\overline{p}/p}$ и $|\delta u|^{\lambda(p-1)}$ суммируемы на Ω. Отсюда и из (3.44) выводим, что $a_i(x,u,\delta u) \in L^{\lambda}(\Omega)$, и тем самым справедливость утверждения 1) установлена. Вследствие этого утверждения для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $a_i(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу неравенства (3.41) и предложения 3.2 функция $(1+|u|)^{p_2}$ суммируема на Ω.

Таким образом, выполняются все условия предложения 3.3, из которого вытекает, что утверждение 2) справедливо. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть* $p > 2 - 1/n$,

$$p_1 < \min\left\{\frac{n}{n-1}\left(p - 2 + \frac{1}{n}\right),\ \frac{p-1}{n-p+1}\right\}, \tag{3.45}$$

$$p_2 < \frac{n(p-1-p_1)}{n-p},$$

$0 < \overline{p} < p^*(p-1-p_1)/(p-1)$, $\overline{c} > 0$ *и* $\overline{g} \in L^1(\Omega)$, $\overline{g} \geqslant 0$ *на* Ω. *Пусть для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,s,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant \overline{c}(|s|^{\overline{p}} + |\xi|^p) + \overline{g}(x).$$

Пусть u *— энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *В таком случае* u *— слабое решение задачи* (3.4), (3.5).

Доказательство. Поскольку выполняются все условия предложения 3.4, из этого предложения выводим, что u — $\mathcal{T}$-решение задачи (3.4), (3.5). Вследствие (3.45) имеем

$$p_1 < \frac{n}{n-1}\left(p - 2 + \frac{1}{n}\right).$$

Тогда $1 < n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)$. Отсюда и из утверждения 2) предложения 3.2 вытекает, что $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Теперь из предложения 3.1 получаем, что u — слабое решение задачи (3.4), (3.5). $\square$

4. Априорные свойства суммируемости и оценки энтропийных решений

Прежде всего докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Пусть* $h \in C^1(\mathbb{R})$ *и* $h(0) = 0$. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. *Тогда* $h(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *и для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *имеем* $D_i h(u) = h'(u) D_i u$ *п. в. на* Ω.

Доказательство. В силу непрерывности функции h на $\mathbb{R}$ и включения $u \in L^{\infty}(\Omega)$ получим $h(u) \in L^{\infty}(\Omega)$.

Далее, положим $m = \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + 1$, и пусть $\{u_j\}$ — последовательность функций из $C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$u_j \to u \quad \text{сильно в } W^{1,p}(\Omega), \tag{4.1}$$

$$u_j \to u \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{4.2}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \qquad |u_j| \leqslant m \quad \text{на } \Omega. \tag{4.3}$$

Поскольку $h \in C^1(\mathbb{R})$ и $h(0) = 0$, имеем

$$\{h(u_j)\} \subset C_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Из (4.2), (4.3) и включения $h(u) \in L^{\infty}(\Omega)$ выводим, что

$$h(u_j) \to h(u) \quad \text{сильно в } L^p(\Omega). \tag{4.5}$$

Зафиксируем $i \in \{1,\dots,n\}$. Поскольку $u \in L^{\infty}(\Omega)$, $D_i u \in L^p(\Omega)$ и функция h' непрерывна на $\mathbb{R}$, имеем $h'(u) D_i u \in L^p(\Omega)$. Учитывая (4.3), для любого $j \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int_{\Omega} |D_i h(u_j) - h'(u) D_i u|^p\, dx \leqslant 2^p \int_{\Omega} |h'(u_j) - h'(u)|^p |D_i u|^p\, dx + \bigl(2 \max_{[-m,m]} |h'|\bigr)^p \int_{\Omega} |D_i u_j - D_i u|^p\, dx.$$

Отсюда и из (4.1)–(4.3) следует, что

$$D_i h(u_j) \to h'(u) D_i u \quad \text{сильно в } L^p(\Omega). \tag{4.6}$$

Из (4.4)–(4.6) вытекает, что существует обобщенная производная $D_i h(u)$, $D_i h(u) = h'(u) D_i u$ п. в. на Ω.

Теперь можно заключить, что $h(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Кроме того, в силу соотношений (4.5) и (4.6) имеем $h(u_j) \to h(u)$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из (4.4) выводим, что $h(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Предложение 4.1. *Пусть* $p_2 = 0$ *и* $g_1 = 0$ *на* Ω. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть* $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, h *ограничена на* $\mathbb{R}$ *и* $h' \geqslant 0$ *на* $\mathbb{R}$. *Тогда функция* $|\delta u|^p h'(u)/(1+|u|)^{p_1}$ *суммируема на* Ω *и справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\, h'(u)\, dx \leqslant \frac{1}{c_1} \int_\Omega [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, h(u)\, dx. \tag{4.7}$$

Доказательство. Зафиксируем $k > \sup\limits_{\mathbb{R}} |h|$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$v_m = T_m(u) - h(T_m(u)), \tag{4.8}$$

$$E_m = \{\, |u - T_m(u) + h(T_m(u))| < k \,\}. \tag{4.9}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\Omega)$, имеем $T_m(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу леммы 4.1 $h(T_m(u)) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$D_i h(T_m(u)) = h'(T_m(u)) D_i T_m(u) \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{4.10}$$

Ясно, что $v_m \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда согласно лемме 3.1

$$\int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i v_m) \Big\}\, dx \leqslant \int_\Omega [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, T_k(u - v_m)\, dx. \tag{4.11}$$

Используя предложение 2.1, (3.2), (4.10), включение $\{|u| < m\} \subset E_m$ и неотрицательность функции h' на $\mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i v_m) \Big\}\, dx = \\
&\quad = \int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - D_i T_m(u)) \Big\}\, dx + \int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i h(T_m(u)) \Big\}\, dx \geqslant \\
&\quad \geqslant \int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i h(T_m(u)) \Big\}\, dx = \int_{E_m} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) D_i T_m(u) \Big\}\, h'(T_m(u))\, dx = \\
&\qquad = \int_{\{|u|<m\}} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u) \delta_i u \Big\}\, h'(u)\, dx \geqslant c_1 \int_{\{|u|<m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}} h'(u)\, dx.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.11) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u|<m\}} \frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\, h'(u)\, dx \leqslant \frac{1}{c_1} \int_\Omega [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, T_k(u - v_m)\, dx. \tag{4.12}$$

Учитывая, что $T_k(u - v_m) \to h(u)$ на Ω, и используя лемму Фату, из (4.12) выводим, что функция $|\delta u|^p h'(u)/(1+|u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство (4.7). □

Следствие 4.1. *Пусть* $p_2 = 0$ *и* $g_1 = 0$ *на* Ω. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geqslant 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} h(t)\, dt < +\infty$, *то функция* $|\delta u|^p h(u)$ *суммируема на* Ω;

2) *если* $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} |h'(t)|^p\, dt < +\infty$, *то* $h(u) \in L^{p^*}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $h \in C(\mathbb{R})$, $h \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} h(t)\,dt < +\infty$. Пусть h_1 — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$h_1(s) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^s (1+|t|)^{p_1} h(t)\,dt, & \text{если } s > 0, \\ 0, & \text{если } s = 0, \\ \displaystyle -\int\limits_s^0 (1+|t|)^{p_1} h(t)\,dt, & \text{если } s < 0. \end{cases}$$

Тогда $h_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $h_1(0) = 0$, h_1 ограничена на $\mathbb{R}$ и для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем $h_1'(s) = (1+|s|)^{p_1} h(s)$. Отсюда и из предложения 4.1 вытекает, что функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω. Следовательно, утверждение 1) справедливо.

Пусть теперь $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1} |h'(t)|^p\,dt < +\infty$. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 4.1 имеем $h(T_k(u)) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ и $|\nabla h(T_k(u))| = |h'(T_k(u))|\,|\nabla T_k(u)|$ п. в. на Ω. Тогда, используя (2.12) и предложение 2.1, получаем

$$\int\limits_\Omega |h(T_k(u))|^{p^*}\,dx \leqslant c_{n,p}^{p^*} \biggl\{ \int\limits_\Omega |h'(T_k(u))|^p |\nabla T_k(u)|^p\,dx \biggr\}^{p^*/p} = c_{n,p}^{p^*} \biggl\{ \int\limits_{\{|u|<k\}} |h'(u)|^p |\delta u|^p\,dx \biggr\}^{p^*/p}. \tag{4.13}$$

Вследствие условий относительно функции h и утверждения 1) функция $|h'(u)|^p |\delta u|^p$ суммируема на Ω. Тогда, используя лемму Фату, из (4.13) выводим, что $h(u) \in L^{p^*}(\Omega)$. Следовательно, утверждение 2) справедливо. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. Пусть u — энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, функции h и h' ограничены на $\mathbb{R}$ и $h' \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда функция $|\delta u|^p h'(u)/(1+|u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\, h'(u)\,dx \leqslant \frac{1}{c_1} \int\limits_\Omega [\, f - a_0(x,u,\delta u)]\, h(u)\,dx + \frac{1}{c_1} \int\limits_\Omega [\, c_2 p_2 (1+|u|)^{p_2} + g_1]\, h'(u)\,dx. \tag{4.14}$$

Доказательство. Зафиксируем $k > \sup\limits_{\mathbb{R}} |h|$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию v_m и множество E_m по формулам (4.8) и (4.9).

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Аналогично изложенному в доказательстве предложения 4.1 имеем $h(T_m(u)) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, $v_m \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и справедливы соотношения (4.10) и (4.11).

Из условия предложения относительно числа p_2 и предложения 3.2 следует, что функция $(1+|u|)^{p_2}$ суммируема на Ω. Учитывая это и используя предложение 2.1, (3.2), (4.10), включение $\{|u|<m\}\subset E_m$ и неотрицательность и ограниченность функции h' на $\mathbb{R}$, получаем

$$\int\limits_{E_m}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u-\delta_i v_m)\right\}dx=$$

$$=\int\limits_{E_m}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u-D_iT_m(u))\right\}dx+\int\limits_{E_m}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)D_ih(T_m(u))\right\}dx=$$

$$=\int\limits_{E_m\cap\{|u|\geqslant m\}}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)\delta_i u\right\}dx+\int\limits_{\{|u|<m\}}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\delta u)\delta_i u\right\}h'(u)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant c_1\int\limits_{\{|u|<m\}}\frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\,h'(u)\,dx-\int\limits_{\{|u|<m\}}[\,c_2p_2(1+|u|)^{p_2}+g_1]\,h'(u)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\{|u|\geqslant m\}}[\,c_2p_2(1+|u|)^{p_2}+g_1]\,dx.$$

Отсюда и из (4.11) вытекает, что для любого $m\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{\{|u|<m\}}\frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1}}\,h'(u)\,dx\leqslant\frac{1}{c_1}\int\limits_{\Omega}[\,f-a_0(x,u,\delta u)]\,T_k(u-v_m)\,dx+$$

$$+\frac{1}{c_1}\int\limits_{\{|u|<m\}}[\,c_2p_2(1+|u|)^{p_2}+g_1]\,h'(u)\,dx+\frac{1}{c_1}\int\limits_{\{|u|\geqslant m\}}[\,c_2p_2(1+|u|)^{p_2}+g_1]\,dx.\tag{4.15}$$

Заметим, что вследствие утверждения 1) предложения 3.2 $\operatorname{meas}\{|u|\geqslant m\}\to 0$ при $m\to\infty$. Тогда, учитывая, что $T_k(u-v_m)\to h(u)$ на Ω, и используя лемму Фату, из (4.15) выводим, что функция $|\delta u|^p h'(u)/(1+|u|)^{p_1}$ суммируема на Ω и справедливо неравенство (4.14). □

Следствие 4.2. *Пусть* $p_2<n(p-1-p_1)/(n-p)$. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $h\in C(\mathbb{R})$, $h\geqslant 0$ *на* $\mathbb{R}$,
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)^{p_1}h(t)\,dt<+\infty,\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}(1+|t|)^{p_1}h(t)<+\infty,\tag{4.16}$$
то функция $|\delta u|^p h(u)$ *суммируема на* Ω;

2) *если* $h\in C^1(\mathbb{R})$, $h(0)=0$,
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)^{p_1}|h'(t)|^p\,dt<+\infty,\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}(1+|t|)^{p_1}|h'(t)|^p<+\infty,\tag{4.17}$$
то $h(u)\in L^{p^*}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $h\in C(\mathbb{R})$, $h\geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ и имеют место неравенства (4.16). Определим функцию h_1 таким же образом, как и в доказательстве следствия 4.1. Имеем $h_1\in C^1(\mathbb{R})$, $h_1(0)=0$, функции h_1 и h_1' ограничены на $\mathbb{R}$ и $h_1'\geqslant 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда в силу предложения 4.2 функция $|\delta u|^p h_1'(u)/(1+|u|)^{p_1}$ суммируема на Ω. Отсюда, учитывая, что для любого $s\in\mathbb{R}$ имеем $h_1'(s)=(1+|s|)^{p_1}h(s)$, получаем, что функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω. Следовательно, утверждение 1) справедливо.

Пусть теперь $h\in C^1(\mathbb{R})$, $h(0)=0$ и имеют место неравенства (4.17). Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ верно (4.13), причем ввиду утверждения 1) функция $|h'(u)|^p|\delta u|^p$ суммируема на Ω. Отсюда и из леммы Фату вытекает, что $h(u)\in L^{p^*}(\Omega)$. Следовательно, утверждение 2) справедливо. □

Следствие 4.3. *Пусть* $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть* $\beta > 1$. *Тогда функция*

$$\frac{|\delta u|^p}{(1+|u|)^{p_1+1}[\ln(2+|u|)]\,[\ln\ln(3+|u|)]^\beta}$$

суммируема на Ω.

Доказательство. Пусть h — функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s\in\mathbb{R}$

$$h(s)=\frac{1}{(1+|s|)^{p_1+1}[\ln(2+|s|)]\,[\ln\ln(3+|s|)]^\beta}\,.$$

Имеем $h\in C(\mathbb{R})$, $h>0$ на $\mathbb{R}$ и справедливы неравенства (4.16). Тогда в силу утверждения 1) следствия 4.2 функция $|\delta u|^p h(u)$ суммируема на Ω. Значит, требуемое утверждение верно. $\square$

Следствие 4.4. *Пусть* $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$. *Пусть* u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5). *Пусть* $h\in C(\mathbb{R})$ *и выполняются условия*: *функция* h *четна*, $h\geqslant 0$ *на* $\mathbb{R}$, h *не возрастает на* $[0,+\infty)$ *и*

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,[\,h(t)]^{(n-p)/n}\,dt<+\infty. \tag{4.18}$$

Тогда функции

$$|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)}h(u),\qquad |\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}[\,h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)}$$

суммируемы на Ω.

Доказательство. Пусть h_1 — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$h_1(s)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^s\frac{[\,h(t)]^{1/p^*}}{(1+|t|)^{(p_1+1)/p}}\,dt, & \text{если } s>0,\\ 0, & \text{если } s=0,\\ \displaystyle-\int\limits_s^0\frac{[\,h(t)]^{1/p^*}}{(1+|t|)^{(p_1+1)/p}}\,dt, & \text{если } s<0.\end{cases}$$

Имеем

$$h_1\in C^1(\mathbb{R}),\qquad h_1(0)=0, \tag{4.19}$$

$$\forall\, t\in\mathbb{R}\qquad (1+|t|)^{p_1}|h_1'(t)|^p=\frac{[\,h(t)]^{(n-p)/n}}{1+|t|}. \tag{4.20}$$

Из (4.18) и (4.20) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)^{p_1}|h_1'(t)|^p\,dt<+\infty. \tag{4.21}$$

Поскольку функция h четна и не возрастает на $[0,+\infty)$, имеем

$$\forall\, t\in\mathbb{R}\qquad h(t)\leqslant h(0). \tag{4.22}$$

Отсюда и из (4.20) вытекает, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(1+|t|)^{p_1}|h_1'(t)|^p<+\infty. \tag{4.23}$$

Учитывая (4.19), (4.21) и (4.23), из утверждения 2) следствия 4.2 выводим, что

$$h_1(u)\in L^{p^*}(\Omega). \tag{4.24}$$

Пусть $s\in\mathbb{R}$. В силу того, что функция h четна и не возрастает на $[0,+\infty)$, имеем

$$|h_1(s)|\geqslant\frac{[\,h(s)]^{1/p^*}|s|}{(1+|s|)^{(p_1+1)/p}}\,. \tag{4.25}$$

Если $|s| \geqslant 1$, то, используя (4.25), получаем

$$|s|^{1-(p_1+1)/p}[\,h(s)]^{1/p^*} \leqslant 2\,|h_1(s)|. \tag{4.26}$$

Если же $|s| < 1$, то, учитывая (4.22), находим, что

$$|s|^{1-(p_1+1)/p}[\,h(s)]^{1/p^*} \leqslant [\,h(0)]^{1/p^*}. \tag{4.27}$$

Из (4.26) и (4.27) следует, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$|s|^{1-(p_1+1)/p}[\,h(s)]^{1/p^*} \leqslant 2\,|h_1(s)| + [\,h(0)]^{1/p^*}.$$

Тогда

$$|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)}h(u) \leqslant 4^{p^*}|h_1(u)|^{p^*} + 2^{p^*}h(0) \quad \text{на} \ \ \Omega.$$

Отсюда и из (4.24) выводим, что функция $|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)}h(u)$ суммируема на Ω.

Далее, положим

$$q = \frac{n(p-1-p_1)}{n-1-p_1}, \qquad \lambda = \frac{n-p}{n-1-p_1}\,.$$

Заметим, что $q < p$,

$$\frac{q(1+p_1)}{p-q} = \frac{n(p-1-p_1)}{n-p}, \tag{4.28}$$

$$(\lambda-1)\frac{p}{q} + 1 = \frac{n-p}{n}\,. \tag{4.29}$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Используя неравенство Юнга с показателями p/q и $p/(p-q)$ и соотношения (4.28), (4.29), получаем

$$|\xi|^q[\,h(s)]^{\lambda} = \frac{|\xi|^q[\,h(s)]^{\lambda-1+q/p}}{(1+|s|)^{(p_1+1)q/p}}(1+|s|)^{(p_1+1)q/p}\,[\,h(s)]^{(p-q)/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\xi|^p[\,h(s)]^{(n-p)/n}}{(1+|s|)^{p_1+1}} + (1+|s|)^{n(p-1-p_1)/(n-p)}h(s).$$

Тогда

$$|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}[\,h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\delta u|^p[\,h(u)]^{(n-p)/n}}{(1+|u|)^{p_1+1}} + (1+|u|)^{n(p-1-p_1)/(n-p)}h(u) \quad \text{на} \ \ \Omega. \tag{4.30}$$

В силу свойств функции h и утверждения 1) следствия 4.2 функция

$$\frac{|\delta u|^p[\,h(u)]^{(n-p)/n}}{(1+|u|)^{p_1+1}}$$

суммируема на Ω. Отсюда, а также из доказанной выше суммируемости функции $|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)} \times h(u)$, (4.22) и (4.30) выводим, что функция $|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}[\,h(u)]^{(n-p)/(n-1-p_1)}$ суммируема на Ω. □

Следствие 4.5. *Пусть* $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$, u — *энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5) *и* $\beta > n/(n-p)$. *Тогда функции*

$$\frac{|u|^{n(p-1-p_1)/(n-p)}}{[\ln(2+|u|)]^{n/(n-p)}[\ln\ln(3+|u|)]^{\beta}}, \qquad \frac{|\delta u|^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}}{[\ln(2+|u|)]^{n/(n-1-p_1)}[\ln\ln(3+|u|)]^{\beta(n-p)/(n-1-p_1)}}$$

суммируемы на Ω.

Доказательство. Пусть h — функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h(s) = \frac{1}{[\ln(2+|s|)]^{n/(n-p)}[\ln\ln(3+|s|)]^{\beta}}\,.$$

Функция h удовлетворяет условиям следствия 4.4, из которого и вытекает требуемое утверждение. □

Из следствия 4.5 выводим такой результат.

Следствие 4.6. *Пусть* $p_2 < n(p-1-p_1)/(n-p)$, u *— энтропийное решение задачи* (3.4), (3.5) *и* $\beta > 1/(p-1-p_1)$. *Тогда*

$$\frac{|u|}{[\ln(2+|u|)]^{1/(p-1-p_1)}[\ln\ln(3+|u|)]^{\beta}} \in L^{n(p-1-p_1)/(n-p)}(\Omega),$$
$$\frac{|\delta u|}{[\ln(2+|u|)]^{1/(p-1-p_1)}[\ln\ln(3+|u|)]^{\beta}} \in L^{n(p-1-p_1)/(n-1-p_1)}(\Omega).$$

5. Теорема существования

Теорема 5.1. *Пусть* $p_1 < (p-1)/(n-p+1)$, $p_2 = 0$ *и* $g_1 = 0$ *на* Ω. *Пусть* $c \geqslant 0$, $0 < \sigma < p-1-p_1$, $g \in L^1(\Omega)$, $g \geqslant 0$ *на* Ω, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \geqslant 0$ *на* $\mathbb{R}$ *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^{p_1}\varphi(t)\,dt < +\infty.$$

Пусть для почти всех $x \in \Omega$ *и любых* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$|a_0(x,s,\xi)| \leqslant c\big[\,|s|^{\sigma} + |\xi|^{\sigma}\big] + |\xi|^p\,\varphi(s) + g(x). \tag{5.1}$$

Тогда существует энтропийное решение задачи (3.4), (3.5).

Доказательство теоремы содержит довольно большое число технических подробностей, полное изложение которых в рамках данной статьи не представляется возможным. Детальному доказательству сформулированного результата и аналогичного утверждения для случая, когда $p_2 \neq 0$, а функция φ удовлетворяет дополнительному условию $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(1+|t|)^{p_1}\varphi(t) < +\infty$, будут посвящены ближайшие публикации автора. Здесь же ограничимся только описанием основных этапов доказательства теоремы 5.1. Они заключаются в следующем.

Прежде всего рассматривается последовательность обобщенных решений $u_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$ аппроксимирующих задач

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i^{(j)}(x,u,\nabla u) + A_0^{(j)}(x,u,\nabla u) = f_j \quad \text{в} \ \ \Omega, \tag{5.2}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \ \ \partial\Omega, \tag{5.3}$$

где $f_j = T_j(f)$, а $A_i^{(j)}$, $A_0^{(j)}$ — функции на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ такие, что для любой тройки $(x,s,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$

$$A_i^{(j)}(x,s,\xi) = a_i(x,T_j(s),\xi), \qquad A_0^{(j)}(x,s,\xi) = T_j(a_0(x,s,\xi)).$$

Подстановка в интегральное тождество, соответствующее аппроксимирующей задаче с правой частью f_j, функции $h(u_j)$ с произвольной ограниченной функцией $h \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условиям $h(0)=0$ и $h' \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, приводит (с использованием леммы 4.1 и неравенств (3.2) и (5.1)) к интегральному неравенству, из которого выводится ряд равномерных интегральных оценок для функций u_j.

Это позволяет, в частности, доказать существование функции $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и возрастающей последовательности $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ таких, что

$$u_{j_l} \to u \quad \text{п. в. на} \ \ \Omega, \tag{5.4}$$

$$\forall\, k > 0 \qquad T_k(u_{j_l}) \to T_k(u) \quad \text{слабо в} \ \ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega). \tag{5.5}$$

Затем с использованием интегральных тождеств, соответствующих аппроксимирующим задачам (5.2), (5.3), неравенств (3.1)–(3.3) и свойств (5.4) и (5.5) устанавливается, что

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \quad\ D_i u_{j_l} \to \delta_i u \quad \text{по мере}, \tag{5.6}$$

$$\forall\, k > 0 \quad\ T_k(u_{j_l}) \to T_k(u) \quad \text{сильно в} \ \ W^{1,p}(\Omega). \tag{5.7}$$

Из выше упомянутых равномерных интегральных оценок для функций u_j (одна из них — это равномерная оценка интегралов функций $|\nabla u_j|^p\,\varphi(u_j)$ по Ω), неравенства (5.1) и свойств (5.4) и (5.6) выводится включение $a_0(x,u,\delta u) \in L^1(\Omega)$.

С помощью тех же равномерных интегральных оценок для функций u_j и свойств (5.4), (5.6) и (5.7) осуществляется предельный переход в интегральных тождествах, соответствующих аппроксимирующим задачам (5.2), (5.3). Это приводит к заключению, что u — энтропийное решение задачи (3.4), (3.5).

В заключение приведем пример функций a_i, $i = 1, \dots, n$, для которых имеют место неравенства (3.1)–(3.3), и пример функции a_0, для которой справедливо неравенство (5.1) с функцией φ, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1.

Пример 5.1. Пусть $p > 2$, $\alpha \in [0, p-1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in (0, p-1-\alpha)$, ψ — неотрицательная непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и $g_0 \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$, $g_0 \geqslant 0$ на Ω. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i — функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$a_i(x, s, \xi) = \frac{|\xi|^{p-2}\xi_i}{(1+|s|)^\alpha} + \beta|s|^\gamma + g_0(x)\psi(s)\xi_i\,.$$

Тогда имеют место неравенства (3.1)–(3.3), причем

$$\bar{c}_k = 6^{p/(p-1)}n, \qquad \bar{g}_k = (3|\beta|k^\gamma)^{p/(p-1)}n + 3^{p/(p-1)}n\Big(\max_{[-k,k]} \psi\Big)^{p/(p-2)} g_0^{p/(p-2)},$$

$$p_1 = \alpha, \qquad p_2 = \Big(\gamma + \frac{\alpha}{p}\Big)\frac{p}{p-1}, \qquad g_1 = 0 \quad \text{на} \ \ \Omega.$$

Пример 5.2. Пусть $\beta > 1$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma < p - 1 - p_1$, $g \in L^1(\Omega)$, $g \geqslant 0$ на Ω, и φ — функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \frac{1}{(1+|s|)^{p_1+1}[\ln(2+|s|)]^\beta}\,.$$

Пусть a_0 — функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$a_0(x, s, \xi) = \beta_1|s|^\sigma + \beta_2|\xi|^\sigma + |\xi|^p\,\varphi(s) + g(x).$$

Тогда функция φ удовлетворяет условиям теоремы 5.1, а для функции a_0 имеет место неравенство (5.1).

6. Библиографический комментарий

Множество $\mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\Omega)$ и некоторые более широкие множества функций были введены в работе [7]. Равенство вида (2.4) служит в [7] для определения градиента элементов функционального класса, содержащего множество $\mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\Omega)$. Прямое определение функций $\delta_i u$ для $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\Omega)$ равенством (2.3) и доказательство предложения 2.1 даны в [14]. Предложение 2.2 можно найти в [2] и [14], его частный случай, когда $\lambda = p$, содержится в лемме 2.2 из [7]. Утверждение, подобное утверждению 1) предложения 2.3, упоминается без доказательства в параграфе 2 работы [7]. Лемма 2.1 по существу доказана в [3]. По поводу аналогичных результатов, в которых вместо (2.10) используются более тонкие оценки, см. [2,4]. В случае $\theta = 1$ неравенства (2.14) и (2.15) при условии (2.13) были ранее установлены в [7]. Способ доказательства леммы 2.2 аналогичен изложенному в [7]. Аналог множества $\mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\Omega)$, подходящий для исследования разрешимости нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с правыми частями из L^1, введен в работе [3].

Соображение использовать неравенство (3.1), допускающее произвольный рост коэффициентов a_i, $i = 1, \dots, n$, по s, инспирировано статьей [9], где было введено аналогичное неравенство для коэффициентов параболического уравнения с L^1-данными. Частный случай условия вырождающейся коэрцитивности (3.2), в котором $p = 2$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$, рассматривался, например, в [10] для линейного уравнения относительно градиента неизвестной функции. В работе [5] изучалась задача Дирихле для уравнения (3.4) с нулевым младшим коэффициентом и коэффициентами a_i, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющими условию (3.2) с $p \in (1, n)$, $p_1 \in [0, p-1)$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$ и имеющими порядок роста по s и ξ не выше $p - 1$. Использование условия строгой монотонности вида (3.3) является обычным в доказательствах существования и (в отдельных случаях) единственности энтропийных решений (см., например, [5,7,12,16]). Относительно определения 3.1

см., например, [12], а относительно определений 3.2 и 3.3 см. [7]. В случае $p_1 = 0$ предложение 3.2 описывает свойства суммируемости, фактически полученные в [7] для энтропийных решений нелинейных эллиптических уравнений со стандартным условием коэрцитивности ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$). В случае $p_1 \neq 0$, но $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$, свойства суммируемости, сформулированные в предложении 3.2, по существу установлены в [5] для энтропийных решений, являющихся пределами решений соответствующих аппроксимирующих задач. В общем случае, рассмотренном в настоящей статье, доказательство утверждений предложения 3.2 сложнее, чем в упомянутых частных случаях. Предложения 3.3, 3.4 и следствие 3.2 обобщают результаты, полученные в [7] в случае $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$.

Насколько автору известно, предложения 4.1 и 4.2 и их следствия, изложенные в разделе 4, являются новыми даже в случае $p_1 = 0$. В частности, даже в случае $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$ следствие 4.6 дает более сильные результаты о суммируемости по сравнению с теми, которые получены в [13] для слабых решений.

Отметим, что оценки (4.7) и (4.14) играют важную роль в изучении свойств суммируемости энтропийных решений при ограничениях на функцию a_0 вида (5.1) и улучшении суммируемости функции f. В целом это довольно обширный вопрос, являющийся предметом отдельной публикации.

В случае, когда старшие коэффициенты уравнения (3.4) не зависят от u, имеют рост порядка $p-1$ по ∇u и удовлетворяют стандартному условию коэрцитивности ($p_1 = 0, p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$), а младший коэффициент a_0 не зависит от ∇u, имеет произвольный рост по u и не убывает по u, существование энтропийного решения задачи (3.4), (3.5) установлено в [7]. Доказательство теоремы 5.1 в общих чертах следует подходу, предложенному в [7]. Однако в нашем случае присутствие младшего коэффициента, подчиненного оценке (5.1) и, вообще говоря, не имеющего какой-либо знакоопределенности, усложняет получение необходимых в рамках упомянутого подхода равномерных оценок решений аппроксимирующих задач. В случае, когда старшие коэффициенты уравнения (3.4) могут иметь рост не выше порядка $p-1$ по u, имеют рост порядка $p-1$ по ∇u и удовлетворяют стандартному условию коэрцитивности ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$ и $g_1 \equiv 0$), младший коэффициент a_0 удовлетворяет неравенству (5.1) с $c = 0$ и $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, а правая часть уравнения есть ограниченная мера Радона на Ω, существование $\mathcal{T}$-решения задачи Дирихле установлено в работе [16]. Заметим, что эта статья содержит интересные (в определенном отношении близкие к нашим) приемы получения интегральных оценок решений аппроксимирующих задач и использованные при доказательстве теоремы 5.1 соображения, связанные с выводом сильной сходимости в $W^{1,p}(\Omega)$ срезок этих решений. Наконец, отметим, что в случае, когда старшие коэффициенты уравнения (3.4) удовлетворяют стандартному условию роста по u и ∇u, $p_1 \in [0, p-1)$, $p_2 = 0$, $g_1 \equiv 0$ и $a_0 \equiv 0$, существование энтропийного решения задачи (3.4), (3.5) доказано в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилбарг Д.*, *Трудингер Н. С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. *Ковалевский А. А.* О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1// Матем. заметки. — 2001. — *70*, № 3. — С. 375–385.
3. *Ковалевский А. А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями// Известия Российской АН. Сер. матем. — 2001. — *65*, № 2. — С. 27–80.
4. *Ковалевский А. А.* О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов// Матем. заметки. — 2003. — *74*, № 5. — С. 676–685.
5. *Alvino A.*, *Boccardo L.*, *Ferone V.*, *Orsina L.*, *Trombetti G.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity// Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. — 2003. — *182*. — С. 53–79.
6. *Alvino A.*, *Ferone V.*, *Trombetti G.* Nonlinear elliptic equations with lower-order terms// Diff. Int. Equations. — 2001. — *14*. — С. 1169–1180.
7. *Bénilan Ph.*, *Boccardo L.*, *Gallouët T.*, *Gariepy R.*, *Pierre M.*, *Vazquez J. L.* An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. — 1995. — *22*. — С. 241–273.
8. *Betta M. F.*, *Del Vecchio T.*, *Posteraro M. R.* Existence and regularity results for nonlinear degenerate elliptic equations with measure data// Ric. Mat. — 1998. — *47*. — С. 277–295.

9. *Blanchard D.*, *Murat F.*, *Redwane H.* Existence et unicité de la solution renormalisée d'un problème parabolique non linéaire assez général// C. R. Acad. Sci. Paris. Serie I. — 1999. — *329.* — C. 575–580.
10. *Boccardo L.*, *Dall'Aglio A.*, *Orsina L.* Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1998. — *46.* — C. 51–81.
11. *Boccardo L.*, *Gallouët T.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data// J. Funct. Anal. — 1989. — *87.* — C. 149–169.
12. *Boccardo L.*, *Gallouët T.* Nonlinear elliptic equations with right hand side measures// Comm. Partial Differential Equations. — 1992. — *17.* — C. 641–655.
13. *Boccardo L.*, *Gallouët T.* Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures// J. Convex Analysis. — 1996. — *3.* — C. 361–365.
14. *Kovalevsky A. A.* On a strict condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-right-hand sides// Preprint Inst. Appl. Math. Mech. of NAS of Ukraine, Donetsk, Ukraine, 2003.
15. *Kovalevsky A. A.* The Dirichlet problem for nonlinear equations with degenerate coercivity and L^1-data// Тр. ИПММ НАН Украины. — 2005. — *10.* — C. 72–78.
16. *Porretta A.* Nonlinear equations with natural growth terms and measure data// Electron. J. Differ. Equ. Conf. — 2002. — Conf *09.* — C. 183–202.

Александр Альбертович Ковалевский
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-mail: `alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua`