

УДК 517.548.2+517.548.9+517.547.26

Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов

Теория кольцевых Q -отображений в геометрической теории функций

Доказано, что открытые дискретные Q -отображения в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $Q \in L_{loc}^1$, абсолютно непрерывны на линиях, принадлежат классу Соболева $W_{loc}^{1,1}$, дифференцируемы почти всюду и обладают N^{-1} -свойством, т.е. обратным к N -свойству Лузина. Установлено, что семейство открытых дискретных кольцевых Q -отображений, выпускающих множество положительной емкости, нормально при условии, что Q имеет либо конечное среднее колебание в каждой точке, либо только логарифмические особенности порядка не выше $n - 1$. Установлено, что при этих же условиях на Q изолированная особенность $x_0 \in D$ открытого дискретного кольцевого Q -отображения $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ устранима и, более того, продолженное отображение открыто и дискретно. На основе этих результатов получены аналоги хорошо известных теорем Лиувилля, Пикара и Сохоцкого.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: квазиконформные отображения и их обобщения, модули семейств кривых, емкость, устранение особенностей отображений, теоремы типа теорем Лиувилля, Сохоцкого, Пикара.

§ 1. Введение

Кольцевые отображения являются подвидом отображений конечного искажения, которые активно изучаются в настоящее время и включают в себя, в частности, класс аналитических функций, классы квазиконформных и квазирегулярных отображений. Настоящая работа выполнена в рамках исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим “идеалом (и целью!) в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)” (см. [1]).

Как известно, в основе геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, лежит условие

$$M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma) \quad (1.1)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D , где M – конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в \mathbb{R}^n), а $K \geq 1$ – некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз.

Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1.1) лежит неравенство вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x), \quad (1.2)$$

где m – мера Лебега в \mathbb{R}^n , ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую единицы в метрике ρ , т.е. $\int_\gamma \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$, а $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – вещественнозначная функция (см., например, [2; гл. IV]. По-видимому, впервые неравенство вида (1.2) было установлено О. Лехто и К. Вертаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [3; с. 221] и Ю. Ф. Струговым в [4] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем в пространстве. В монографии В. М. Миклюкова [5] исследовались другие классы отображений, удовлетворяющих оценкам, имеющим некоторое сходство с упомянутым выше неравенством. Соотношение (1.2) установлено в работе [6] для квазиконформных отображений в пространстве, где Q равно $K_I(x, f)$ ($K_I(x, f)$ – внутренняя дилатация отображения f).

В случае, когда $Q(x) \leq K$ почти всюду (отображение f в этом случае квазирегулярно), мы снова приходим к неравенству (1.1). По поводу определений и свойств квазирегулярных отображений (или отображений с ограниченным искажением) см., например, [7]–[9]. В случае неограниченной функции $Q(x)$ неравенство (1.2) означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом Q , $M(f(\Gamma)) \leq M_Q(\Gamma)$ (см. [10]). В дальнейшем мы будем предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ , а только “некоторые”. Именно, ограничимся рассмотрением только тех семейств кривых Γ , которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области; для получения ряда свойств отображений, удовлетворяющих неравенствам типа (1.2), таких семейств Γ уже вполне достаточно. Неравенство вида (1.2), выполненное для упомянутых выше семейств кривых, положено в основу определения кольцевых Q -отображений. Основная задача настоящей работы – описать свойства отображения f , если *a priori* известно, что оно удовлетворяет оценкам вида (1.2). Подробнее, пусть $x_0 \in D$, $A = A(r_1, r_2, x_0)$ – сферическое кольцо, центрированное в точке x_0 , с радиусами r_1 и r_2 ($0 < r_1 < r_2 < r_0 := \text{dist}(x_0, \partial D)$), $S_i = S(x_0, r_i)$ – сфера с центром в точке x_0 радиуса r_i , $i = 1, 2$, а $\Gamma(S_1, S_2, A)$ – семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A . Отображение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.3)$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2 , указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

Слово “кольцевое” в данном выше определении указывает на происхождение семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$, входящих в левую часть неравенства (1.3), а “ Q -отображение” – на заданную вещественнозначную функцию Q в правой части (1.3).

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению вида (1.3) при $Q \in L^1_{\text{loc}}$ в каждой точке $x_0 \in D$ для соответствующих r_1, r_2 и функций η . Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду в D (см. теорему 3.1 далее). Если дополнительно f удовлетворяет более сильному условию (1.2), то

- 1) отображение $f \in ACL$ и, более того, $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}$ (см. теорему 3.2 и следствие 3.3);
- 2) отображение f имеет N^{-1} -свойство Лузина и якобиан $J(x, f) \neq 0$ почти всюду (см. следствия 3.4 и 3.5).

Пусть

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int Q(x) dS,$$

где dS – элемент площади поверхности S , ω_{n-1} – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной емкости, \mathfrak{F}_Q – семейство открытых дискретных отображений $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющих соотношению вида (1.3) с одним и тем же Q в каждой точке $x_0 \in D$ для соответствующих r_1, r_2 и функций η . Предположим, что либо функция Q имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \rightarrow 0$, для произвольного $x_0 \in D$. Тогда \mathfrak{F}_Q образует нормальное семейство отображений (см. теорему 4.1 далее).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению вида (1.3) в точке x_0 для соответствующих r_1, r_2 и функций η . Предположим, что либо функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \rightarrow 0$. Тогда

- 1) если конформная емкость множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ положительна, то отображение f продолжимо в точку x_0 по непрерывности, причем продолженное отображение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ открыто и дискретно (см. теоремы 5.1 и 5.2 далее);
- 2) если же x_0 – существенная особая точка отображения f , то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \rightarrow x_0$, $k \rightarrow \infty$, такая, что $f(x_k) \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$ (см. теорему 5.6).

Второе заключение утверждения 1.3, представляющее собой аналог хорошо известной теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса для аналитических функций, в случае отображений с ограниченным искажением опубликовано в работе

О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вайсяля (см. [11; следствие 4.6], и [8; гл. III, следствие 2.11]). В работе [12] В. М. Миклюкова показано, что если квазирегулярное отображение $f: \Omega \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет в каждой точке $x_0 \in A$ компактного множества A емкости нуль существенную особенность, то предельным множеством в x_0 будет все пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. теорему 2 в [12]). По устранению особенностей для отображений с конечным искажением см. также [13] и [14]. Отметим также работу [15], связанную с важнейшими исследованиями в смежных направлениях.

§ 2. Основные определения

Всюду далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n . Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *нульмерным*, если каждая компонента связности множества $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку для каждого $y \in \mathbb{R}^n$. Запись $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно, запись $G \Subset D$ означает, что \overline{G} – компактное подмножество области D . Будем говорить, что отображение f *сохраняет ориентацию*, если топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Окрестность U точки x_0 называется *нормальной окрестностью отображения f* , если U является нормальной областью f . Для отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E , т.е.

$$N(y, f, E) = \text{card}\{x \in E : f(x) = y\}, \quad N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное отображение и существует область $G \Subset D$ такая, что $\overline{G} \cap \{f^{-1}(f(x))\} = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. Приведенные выше понятия открытости, дискретности, нульмерности, сохранения ориентации естественным образом распространяются на отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация \mathbb{R}^n . В дальнейшем

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, & B(r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}, \\ \mathbb{B}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, & S(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \\ S(r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}, & \mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \end{aligned}$$

ω_{n-1} – площадь сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n , Ω_n – объем единичного шара в \mathbb{R}^n , m – мера Лебега в \mathbb{R}^n , для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега в \mathbb{R}^n (иногда мы также используем обозначение $m(A)$), $\text{mes}_1(A)$ обозначает линейную меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$

над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) dS,$$

где dS – элемент площади поверхности S ,

$$\int_A f(x) dm(x) := \frac{1}{|A|} \int_A f(x) dm(x),$$

$\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $d(A)$ – евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x).$$

Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . В этом случае $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ (см. [16; теорема 6.4]). Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности (см. [17]). Пусть $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция,

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \quad S_i = S(x_0, r_i), \quad i = 1, 2.$$

Говорят, что $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \tag{2.1}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

Изучение кольцевых Q -отображений, в частности, связано с исследованием классов Соболева (см. последний параграф настоящей статьи), а также с исследованием уравнений типа уравнений Бельтрами, решения которых удовлетворяют соотношениям вида (2.1) (см., например, раздел 11.5 гл. XI в [2]). Заметим, что K -квазиконформные отображения удовлетворяют соотношениям вида (1.2) и (2.1) при $Q(x) \equiv K \in [1, \infty)$. Обратно, если f – гомеоморфизм,

удовлетворяющий соотношению вида (1.2) при $Q(x) \equiv K \in [1, \infty)$, то f является K -квазиконформным отображением (см. теорему 34.3 в [16]). Отображение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть Q -отображением, если f удовлетворяет соотношению (1.2) для произвольного семейства кривых Γ в области D и каждой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$. В частности, если f – гомеоморфизм, будем называть такое отображение Q -гомеоморфизмом. В случае, когда $Q(x) \equiv K \in [1, \infty)$, функция Q просто выносится из-под знака интеграла в (1.2) и в правой части (1.2) возникает модуль. Отметим, что основная трудность при проведении нами доказательства какого-либо свойства отображения f , удовлетворяющего соотношению вида (1.2) или (2.1) при неограниченной функции $Q(x)$, состоит в том, чтобы проследить поведение правой части соответствующего неравенства в зависимости от поведения функции Q . При изучении отображений с ограниченным искажением подобной трудности не возникает, так как в этом случае в правой части (1.2) (либо (2.1)) возникает модуль исходного семейства кривых, помноженный на константу. Доказательства, применявшиеся ранее для извлечения свойств отображений с ограниченным искажением, в значительной мере учитывали указанный выше аспект.

Пусть $x_0 \in D$. По аналогии будем говорить, что отображение $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$* , если выполнено соотношение (2.1). Заметим, что подклассом кольцевых Q -отображений являются Q -отображения, т.е. непрерывные отображения, удовлетворяющие оценке (1.2).

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f , если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty$. Если $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если при $x \rightarrow x_0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела. Следующие важные определения можно найти в [8; раздел 3, гл. II]. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и $x \in \{f^{-1}(\beta(a))\}$. Кривая $\alpha: [a, c] \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если

- (i) $\alpha(a) = x$;
- (ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$;
- (iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha': [a, c'] \rightarrow D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a, c']}$.

Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in \{f^{-1}(\beta(a))\}$. Тогда кривая $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. [8; гл. 2, следствие 3.3]). В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и емкости конденсатора (см., например [9; раздел 10, гл. II]). *Конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где A – открытое множество в \mathbb{R}^n , а C – компактное подмножество A . *Емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\text{cap } E = \text{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = (\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2)^{1/2}$. Известно, что для произвольного конденсатора $E = (A, C)$ выполнено

$$(\text{cap } E)^{n-1} \geq b_n \frac{(d(C))^n}{m(A)}, \tag{2.2}$$

где $b_n > 0$ – константа, зависящая только от размерности n (см. например [9; лемма 5.9]). Говорят, что компакт C в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, имеет нулевую емкость, пишут $\text{cap } C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A такое, что $C \subset A$ и $\text{cap}(A, C) = 0$. Известно, что (см., например, [7; лемма 3.4, гл. II]) в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в \mathbb{R}^n , содержащего C , будет выполнено $\text{cap}(A, C) = 0$. В противном случае полагаем $\text{cap } C > 0$. Аналогично можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см., например, [11; раздел 2.12]). Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ – открытый n -мерный интервал. Говорят, что отображение $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL (абсолютно непрерывно на линиях), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I , параллельных координатным осям. Говорят, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL , когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала $I, \bar{I} \subset D$.

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ используется сферическая (хордальная) метрика $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n((1/2)e_{n+1}, 1/2)$ в \mathbb{R}^{n+1} :

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Для отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x , $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x , т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \quad l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Внешняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|}{|J(x, f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$. Полагаем $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$. Полагаем $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Напомним, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает N^{-1} -свойством, если из условия $|f(E)| = 0$ следует, что $|E| = 0$.

Пусть (X, d) и (X', d') – метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство \mathfrak{F} непрерывных отображений $f: X \rightarrow X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} , которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f: X \rightarrow X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим понятием. Семейство \mathfrak{F} отображений $f: X \rightarrow X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что \mathfrak{F} *равностепенно непрерывно*, если \mathfrak{F} равностепенно непрерывно в каждой точке из X .

Напомним, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ с $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D , $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x) - \varphi_B| dm(x) < \infty, \quad (2.3)$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset D$ и

$$\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x) dm(x)$$

– среднее значение функции φ на шаре B (см., например, [18]).

Хорошо известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{\text{loc}}(D)$ (см., например, [18]). Следуя работе [19], введем ряд определений, обобщающих определение ограниченного среднего колебания ввиду некоторого отсутствия “равномерности” по заданной области величины, стоящей под знаком \sup в (2.3). Будем говорить, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x).$$

Заметим, что при выполнении условия (2.4) возможна ситуация, когда $\bar{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Также будем говорить, что $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D (пишем $\varphi \in FMO(D)$ или $\varphi \in FMO$), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$. В частности, если в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x)| dm(x) < \infty,$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 . Очевидно, $BMO \subset FMO$. Заметим, что $FMO \neq BMO_{\text{loc}}$ (см., например, [2; раздел 11.2, гл. XI, с. 210]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$, $n \geq 2$. Тогда

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{\varphi(x) dm(x)}{(|x| \log(1/|x|))^n} = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

для некоторого $\varepsilon_0 \leq \text{dist}(0, \partial D)$ (см. [19; следствие 2.3]).

§ 3. Дифференцируемость, ACL и N^{-1} -свойство

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $E = (A, C)$ – произвольный конденсатор в \mathbb{R}^n , а Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b] \rightarrow A$, $\gamma(a) \in C$, и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\text{cap} E = M(\Gamma_E)$ (см. [8; гл. II, предложение 10.2]).

Отметим, что заключение предложения 3.1 остается справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [8; замечание 10.8, гл. II]).

Иначе говоря, для конденсатора $E = (A, C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C , лежат в A и в то же время целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A . В случае ограниченного множества A такие кривые обязаны “подходить” к границе A , но не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться.

ТЕОРЕМА 3.1 (дифференцируемость почти всюду). Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение, т.е. f удовлетворяет (2.1) для произвольной $\eta(t): (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$, причем $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда f дифференцируема почти всюду в D .

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в D , $\Phi(B) = m(f(B))$. Согласно 2.2, 2.3 и 2.12 из [9] для почти всех $x \in D$ имеем

$$\varphi(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B(x, \varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n} < \infty, \tag{3.1}$$

где $B(x, \varepsilon)$ – шар в \mathbb{R}^n с центром в точке $x \in D$ радиуса $\varepsilon > 0$. При $x, y \in D$ полагаем

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Итак, по теореме Радемахера–Степанова (см., например, [20; гл. III, § 3.1, теорема 3.1.9]) доказательство теоремы 3.1 сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение с $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда почти всюду

$$L(x, f) \leq \gamma_n \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x), \tag{3.2}$$

где функция φ определена соотношением (3.1), а γ_n – некоторая константа, зависящая только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Рассмотрим сферическое кольцо

$$R_\varepsilon(x) = \{y : \varepsilon < |x - y| < 2\varepsilon\}, \quad x \in D,$$

с произвольным $\varepsilon > 0$ таким, что $B(x, 2\varepsilon) \subset D$. Тогда $E = (B(x, 2\varepsilon), \overline{B(x, \varepsilon)})$ – конденсатор в D , а $f(E) = (f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x, \varepsilon)}))$ – конденсатор в D' . Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ – семейства кривых в смысле обозначений предложения 3.1. По этому предложению

$$\text{cap}(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x, \varepsilon)})) = M(\Gamma_{f(E)}). \quad (3.3)$$

Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B(x, \varepsilon)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha: [a, c] \rightarrow B(x, 2\varepsilon)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x, 2\varepsilon)$. Следовательно, его замыкание $\bar{\alpha}$ – компакт в $B(x, 2\varepsilon)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ – компакт в $f(B(x, 2\varepsilon))$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим множество

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)\}, \quad t_k \in [a, c], \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c.$$

Отметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k . Для $x \in G$ в силу непрерывности f будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$, $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c]$, $t_k \rightarrow c$, $k \rightarrow \infty$. Однако $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x, 2\varepsilon)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$ (см. [21; раздел 3.6 гл. I]) имеем

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c])} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c]) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c]) \neq \emptyset$$

в силу монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c])$ и, таким образом, G является связным согласно [21; раздел 9.12 гл. I]. Таким образом, в силу дискретности f множество G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha: [a, c] \rightarrow B(x, 2\varepsilon)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha: [a, c] \rightarrow K \subset B(x, 2\varepsilon)$, причем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 гл. II из [8] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b]}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c']$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальнойности поднятия α . Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно,

$$M(\Gamma_{f(E)}) \leq M(f(\Gamma^*)) \leq M(f(\Gamma_E)).$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon < r_i < 2\varepsilon$, такую, что $r_i \rightarrow 2\varepsilon - 0$. Обозначим через Γ_i семейство кривых, соединяющих сферы $|x - y| = \varepsilon$ и $|x - y| = r_i$ в кольце $\varepsilon < |x - y| < r_i$. В таком случае для любого $i \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Gamma_E > \Gamma_i. \quad (3.4)$$

Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_{i,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_i - \varepsilon}, & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i). \end{cases}$$

По определению кольцевого Q -отображения и в силу (3.4)

$$\begin{aligned} M(f(\Gamma_E)) &\leq M(f(\Gamma_i)) \leq \frac{1}{(r_i - \varepsilon)^n} \int_{\varepsilon < |x-y| < r_i} Q(y) dm(y) \\ &\leq \frac{1}{(r_i - \varepsilon)^n} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm(y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Переходим в правой части (3.5) к пределу при $i \rightarrow \infty$. Получаем

$$M(f(\Gamma_E)) \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm(y). \quad (3.6)$$

Из (3.3) и (3.6) имеем

$$\text{cap}(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x, \varepsilon)})) \leq \frac{2^n \Omega_n}{m(B(x, 2\varepsilon))} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm(y). \quad (3.7)$$

С другой стороны, используя соотношение (2.2), получаем

$$\text{cap}(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x, \varepsilon)})) \geq \left(C_n \frac{d^n(f(B(x, \varepsilon)))}{m(f(B(x, 2\varepsilon)))} \right)^{1/(n-1)}, \quad (3.8)$$

где C_n – константа, зависящая только от размерности пространства n .

Комбинируя (3.7) и (3.8), получаем, что

$$\frac{d(f(B(x, \varepsilon)))}{\varepsilon} \leq \gamma_n \left(\frac{m(f(B(x, 2\varepsilon)))}{m(B(x, 2\varepsilon))} \right)^{1/n} \left(\frac{1}{m(B(x, 2\varepsilon))} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm(y) \right)^{(n-1)/n},$$

где γ_n – некоторая постоянная, и, следовательно, почти всюду

$$L(x, f) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(f(B(x, \varepsilon)))}{\varepsilon} \leq \gamma_n \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение, $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда f имеет локально суммируемые частные производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактного множества $V \subset D$ имеем

$$\int_V L(x, f) dm(x) \leq \gamma_n \int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x) dm(x).$$

Применяя неравенство Гёльдера (см., например, (17.3) в [22]) при $p = n$ и $q = n/(n-1)$, получаем

$$\int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x) dm(x) \leq \left(\int_V \varphi(x) dm(x) \right)^{1/n} \left(\int_V Q(x) dm(x) \right)^{(n-1)/n}.$$

Наконец, используя включение $Q \in L^1_{\text{loc}}$ и лемму 2.3 из [9], приходим к заключению, что

$$\int_V L(x, f) dm(x) \leq \gamma_n N(f, V)^{2/n} \left(\int_V Q(x) dm(x) \right)^{(n-1)/n} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное кольцевое Q -отображение, $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда п.в.

$$\|f'(x)\|^n \leq C_n |J(x, f)| Q^{n-1}(x),$$

где постоянная C_n зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (3.2) и теорему Лебега (см. раздел 24.4 в [16], а также лемму 2.14 в [9]), получаем нужную оценку.

ТЕОРЕМА 3.2 (абсолютная непрерывность на линиях). Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное Q -отображение, $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда $f \in ACL$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Пусть I – n -мерный интервал в \mathbb{R}^n с ребрами, параллельными осям координат, и $\bar{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где I_0 – $(n-1)$ -мерный интервал в \mathbb{R}^{n-1} , J – одномерный интервал, $J = (a, b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ с \mathbb{R}^n . Покажем, что для почти всех сегментов $J_z = \{z\} \times J$, $z \in I_0$, отображение $f|_{J_z}$ абсолютно непрерывно. Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в I_0 , $\Phi(B) = m(f(B \times J))$. Согласно леммам 2.3 и 2.12 из [9] имеем

$$\varphi(z) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty \tag{3.9}$$

для почти всех $z \in I_0$, где через $B(z, r)$ обозначен шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z \in I_0$ радиуса r , Ω_{n-1} – объем единичного шара в \mathbb{R}^{n-1} .

Пусть Δ_i , $i = 1, 2, \dots$, – некоторая перенумерация совокупности S всех интервалов в J с $\bar{\Delta}_i \subset J$ и рациональными концами. Обозначим

$$\varphi_i(z) := \int_{\Delta_i} Q(z, x_n) dx_n. \tag{3.10}$$

Тогда при почти всех z по теореме Фубини (см., например, раздел 8.1 гл. III в [23]) функции $\varphi_i(z)$ почти всюду конечны и интегрируемы по $z \in I_0$. Кроме того, почти всюду существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = \varphi_i(z), \tag{3.11}$$

где

$$\Phi_i(B(z, r)) = \int_{B(z, r)} \varphi_i(\zeta) d\zeta, \quad z \in I_0.$$

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом сегменте J_z , $z \in I_0$, где пределы (3.9) и (3.11) существуют и конечны. Обозначим соответствующее множество z через Z_0 и покажем, что сумма диаметров образов

любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z = \{z\} \times J$, $z \in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. В силу непрерывности f вдоль J_z достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в J_z . Итак, пусть $\Delta_i^* = \{z\} \times \bar{\Delta}_i \subset J_z$, $z \in Z_0$, $i = 1, 2, \dots, k$, где $\Delta_i \in S$, $i = 1, \dots, k$, взаимно не пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, k$, также попарно не пересекаются.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное рациональное число, которое меньше половины минимального расстояния между $\bar{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, k$, а также меньше их расстояния до концевых точек интервала J . Пусть $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\delta_i = (\alpha_i - \delta, \beta_i + \delta)$, $i = 1, \dots, k$, и $A_i = B(z, r) \times \delta_i$, где $B(z, r)$ – открытый шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке z и радиуса $r > 0$. При малых $r > 0$, $E_i = (A_i, \Delta_i^*)$, $i = 1, \dots, k$, – конденсаторы в I и, следовательно, $f(E_i) = (f(A_i), f(\Delta_i^*))$, $i = 1, \dots, k$, – также конденсаторы в $D' = f(D)$. По предложению 3.1 имеем

$$\text{cap}(f(A_i), f(\Delta_i^*)) = M(\Gamma_{f(E_i)}). \tag{3.12}$$

Обозначим через $\Gamma_{E_i^*}$ семейство максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E_i)}$ с началом в Δ_i^* . Тогда $\Gamma_{E_i^*} \subset \Gamma_{E_i}$ и из (3.12) получаем, что

$$\text{cap}(f(A_i), f(\Delta_i^*)) \leq M(f(\Gamma_{E_i})). \tag{3.13}$$

Заметим, что функция

$$\rho_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{если } x \in A_i, \\ 0, & \text{если } x \notin A_i, \end{cases}$$

является допустимой для семейства E_i , поэтому из (3.13) по определению

$$\text{cap}(f(A_i), f(\Delta_i^*)) \leq \frac{1}{r^n} \int_{A_i} Q(x) \, dm(x). \tag{3.14}$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.2) выполнена оценка

$$\text{cap}(f(A_i), f(\Delta_i^*)) \geq \left(C_n \frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)}, \tag{3.15}$$

где d_i – диаметр множества $f(\Delta_i^*)$, m_i – мера Лебега в \mathbb{R}^n множества $f(A_i)$, C_n – константа, зависящая только от n .

Комбинируя (3.14) и (3.15), имеем неравенство

$$\left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)} \leq \frac{c_n}{r^n} \int_{A_i} Q(x) \, dm(x) \tag{3.16}$$

с новой константой c_n , зависящей только от n , при всех $i = 1, \dots, k$.

Далее, по дискретному неравенству Гёльдера (см., например, (17.3) в [22]) с $p = n/(n-1)$ и $q = n$, $x_k = d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k = m_k^{1/n}$ получаем, что

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \left(\sum_{i=1}^k m_i \right)^{1/n},$$

т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^n \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{1/(n-1)}\right)^{n-1} \Phi(B(z, r)),$$

и в силу (3.16) имеем оценку

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^n \leq \gamma_n \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\int_{A_i} Q(x) dm(x)}{\Omega_{n-1} r^{n-1}}\right)^{n-1},$$

где γ_n зависит только от n . Переходя к верхнему пределу при $r \rightarrow 0$, а затем к пределу при $\delta \rightarrow 0$, из (3.9) и (3.11) получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^n \leq \gamma_n \varphi(z) \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i(z)\right)^{n-1}. \quad (3.17)$$

Наконец, в силу (3.17) абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Q над сегментами J_z , $z \in Z_0$, которая следует из (3.10), влечет абсолютную непрерывность на том же сегменте отображения f .

Комбинируя теорему 3.2 и следствие 3.1, получаем следующее заключение (см., например, [24]).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное Q -отображение, $Q \in L_{\text{loc}}^1$. Тогда $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное Q -отображение, $Q \in L_{\text{loc}}^1$. Тогда f обладает N^{-1} -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на одном результате работы [25] (см. теорему 1.2). Учитывая, что согласно следствиям 3.2 и 3.3 отображение f по определению является отображением с конечным искажением (см. [26], [27]), достаточно показать, что $Q^{n-1} \in L_{\text{loc}}^{n'-1}$, где $1/n' + 1/n = 1$. Имеем $n' = n/(n-1)$ и $n' - 1 = 1/(n-1)$. Так как по условию $Q \in L_{\text{loc}}^1$, то $Q^{n-1} \in L_{\text{loc}}^{1/(n-1)}$ и тем самым следствие 3.4 доказано.

Хорошо известно, что N^{-1} -свойство эквивалентно невырожденности якобиана для почти всех точек области (см., например, [28]). Поэтому из следствия 3.4 получаем еще один важный результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное Q -отображение, $Q \in L_{\text{loc}}^1$. Тогда $J(x, f) \neq 0$ почти всюду в D .

§ 4. Нормальность семейств Q -отображений

Ниже мы формулируем одну из версий теоремы Арцела–Асколи (см. 20.4 в [16]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если (X, d) – сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') – компактное метрическое пространство, то семейство \mathfrak{F} отображений $f: X \rightarrow X'$ нормально тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} равномерно непрерывно.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение. Предположим, что

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x)\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|) dm(x) \leq F(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (4.1)$$

для некоторого $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$, и некоторого семейства измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, таких, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{F(\varepsilon)}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (4.2)$$

где $E = (A, C)$, $A = B(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$; считаем $r_0 := \infty$ при $D = \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f – открытое и непрерывное отображение, $E' = f(E)$ также является конденсатором. Если $\text{cap } f(E) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\text{cap } f(E) \neq 0$. Обозначим через $\Gamma_{f(E)}^*$ семейство всех спрямляемых кривых $\Gamma_{f(E)}$ (см. обозначения предложения 3.1). Ясно, что кривые из $\Gamma_{f(E)}^*$ не проходят через ∞ . Отметим, что $M(\Gamma_{f(E)}^*) = M(\Gamma_{f(E)}) = \text{cap } f(E)$ (см. предложение 3.1). Заметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{f(E)}^*$ имеет максимальное поднятие при отображении f , лежащее в A с началом в C (см. следствие 3.3 гл. II в [8]). Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}^*$ при отображении f . Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.1, будем иметь $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)}^* > f(\Gamma^*)$ и, следовательно,

$$M(\Gamma_{f(E)}^*) \leq M(f(\Gamma^*)). \quad (4.3)$$

Рассмотрим $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon)$, $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0)$, где ε_0 – из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим, что поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D) < \Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D)) < f(\Gamma^*)$. Поэтому

$$M(f(\Gamma^*)) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D))). \quad (4.4)$$

Из соотношений (4.3) и (4.4) следует, что $M(\Gamma_{f(E)}^*) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D)))$, и, таким образом, по предложению 3.1 имеем

$$\text{cap } f(E) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D))). \quad (4.5)$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Заметим, что

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Тогда по определению кольцевого Q -отображения

$$M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D))) \leq \frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x)\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|) dm(x). \quad (4.6)$$

Наконец, из соотношений (4.1), (4.5) и (4.6) следует соотношение (4.2). Лемма 4.1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Предположим, что E – компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что $\text{cap } E > 0$. Тогда для каждого $a > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C) \geq \delta$, где C – произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такой, что $h(C) \geq a$ (см. лемму 3.11 в [11] или лемму 2.6 гл. III в [8]).*

ЛЕММА 4.2. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной емкости, \mathfrak{F}_Q – семейство открытых дискретных кольцевых Q -отображений $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$. Предположим, что*

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (4.7)$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$, где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций таких, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда семейство отображений \mathfrak{F}_Q равномерно непрерывно в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$, $A = B(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, а $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Как и прежде, $r_0 := \infty$ при $D = \mathbb{R}^n$. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдется число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие предложения 4.2 относительно множества E , соответствующего условию леммы 4.2. Используя оценку (4.2) из леммы 4.1, из условия (4.7) получаем $\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(a)$ найдется $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq \delta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a)). \quad (4.8)$$

Используя соотношение (4.8), получаем

$$\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) \leq \text{cap}(f(B(x_0, r_0)), f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) \leq \delta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a)).$$

Тогда из предложения 4.2 следует, что $h(f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) < a$. Окончательно, для любого $a > 0$ существует $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что $h(f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) < a$, как только $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a))$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Пусть $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$, такие, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \rightarrow 0$. Тогда можно указать $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функцию $\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) > 0$ такие, что в точке x_0 выполнено условие (4.7) леммы 4.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $Q \in FMO(0)$ и $\varepsilon_0 < \min\{\text{dist}(0, \partial D), e^{-1}\}$. На основании предложения 2.1 для функции $0 < \psi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$ имеем

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t) dt = \frac{\log(\log(1/\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon_0)}.$$

Таким образом, утверждение предложения 4.3 в случае $Q \in FMO$ доказано. Покажем его справедливость в случае $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \rightarrow 0$. Как и прежде, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\text{dist}(0, \partial D), 1\}$. Положим $\psi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{Q(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} &= \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int_{|x|=r} \frac{Q(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} dS \right) dr \\ &\leq c\omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \log(1/r)} = c\omega_{n-1} \log \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon_0)} = c\omega_{n-1} I(\varepsilon, \varepsilon_0), \end{aligned}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$, а c – некоторая постоянная. Предложение 4.3 полностью доказано.

Сформулируем теперь важнейшую теорему этого параграфа, справедливость которой непосредственно следует из леммы 4.2, предложения 4.3 и предложения 4.1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество положительной емкости, \mathfrak{F}_Q – семейство открытых дискретных кольцевых Q -отображений $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ такое, что либо $Q \in FMO(D)$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \rightarrow 0$, для произвольного $x_0 \in D$. Тогда \mathfrak{F}_Q образует нормальное семейство отображений.

§ 5. Устранение изолированных особенностей.

Теоремы типа теорем Сохоцкого, Пикара, Лиувилля

ЛЕММА 5.1. Пусть $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$. Предположим, что существует $0 < \varepsilon_0 < 1$ такое, что

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная на $(0, \infty)$ функция такая, что $\psi(t) > 0$ при почти всех t и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в \mathbb{B}^n . Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x'_j , принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, с $x_j \rightarrow 0$, $x'_j \rightarrow 0$ такие, что $h(f(x_j), f(x'_j)) \geq a > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x'_j лежат внутри шара $B(\varepsilon_0)$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x'_j|\}$. Соединим точки x_j и x'_j замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f

получаем, что $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ (см. обозначения предложения 3.1). Пусть Γ_j^* – семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j , лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Рассуждая так же, как в лемме 3.1, имеем $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Так как $\Gamma_{f(E_j)} > f(\Gamma_j^*)$, то

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leq M(f(\Gamma_j^*)) \leq M(f(\Gamma_{E_j})). \quad (5.2)$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства,

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \quad (5.3)$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c] \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a, c]$ с $\alpha(t_k) \rightarrow 0$, при $t_k \rightarrow c - 0$, $\Gamma_{E_{j_2}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c] \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a, c]$ с $\text{dist}(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \rightarrow 0$ при $t_k \rightarrow c - 0$.

В силу соотношений (5.2) и (5.3) имеем

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leq M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) + M(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \quad (5.4)$$

Покажем, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j \geq 1$ и положим $l_j = \min\{|x_j|, |x'_j|\}$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon, j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < l_j\}$ и соответствующее семейство функций

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t)}{I(\varepsilon, l_j)}, & t \in (\varepsilon, l_j), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, l_j). \end{cases}$$

Имеем

$$\int_\varepsilon^{l_j} \eta_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)} \int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt = 1.$$

Следовательно, по определению кольцевого Q -отображения

$$M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) \leq \mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^n} \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x). \quad (5.5)$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Учитывая (5.1), имеем следующее соотношение:

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = G(\varepsilon) \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t) dt \right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon) \left(1 + \frac{\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t) dt}{\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt} \right)^n,$$

где $\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$ – фиксированное число, а $\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (5.1) увеличивается при уменьшении ε . Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Отметим, что левая часть неравенства (5.5) не зависит

от ε , а j фиксировано. Отсюда получаем, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$. Фиксируем произвольно некоторое $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. В силу соотношения (5.1) можно считать, что $I(\varepsilon, r_i) > 0$, $\varepsilon \in (0, r_i)$. Аналогично схеме, приведенной выше, рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_1\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_1), & t \in (r_j, \varepsilon_1), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j, \varepsilon_1). \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{r_j}^{\varepsilon_1} \eta_j(t) dt = \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)} \int_{r_j}^{\varepsilon_1} \psi(t) dt = 1.$$

Таким образом, по определению кольцевого Q -отображения и условию (5.4) получаем

$$M(f(\Gamma_{E_j})) \leq \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)^n} \int_{r_j < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x).$$

В силу условия (5.1) имеем $\mathcal{S}(r_j) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Окончательно, $\text{sap } f(E_j) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, в силу предложения 3.1. С другой стороны, $\text{sap } f(E_j) \geq \delta > 0$, $j \in \mathbb{N}$, в силу предложения 4.2. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \rightarrow 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Выбирая в лемме 5.1 функцию $\psi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$, в силу предложения 2.1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , удовлетворяющее условию $\text{sap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , то f имеет непрерывное продолжение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. В частности, если

$$\int_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x) dm(x) = O(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{5.6}$$

то f имеет непрерывное продолжение в D .

Выбирая в лемме 5.1 функцию $\psi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$, получаем также следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , удовлетворяющее условию $\text{sap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right), \quad r \rightarrow 0, \tag{5.7}$$

где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, то f имеет непрерывное продолжение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$. В частности, если при некотором $\varepsilon(x_0)$ и некоторой постоянной $c > 0$ выполнено

$$Q(x) \leq c \left[\log \frac{1}{|x - x_0|} \right]^{n-1}, \quad x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)),$$

то выполнено (5.6) и, значит, справедливо заключение теоремы.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = 0$, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f , то $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) = 0$ для любой окрестности U точки x_0 .

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 соответственно.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка x_0 устранима, т.е. существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \leq |A| + 1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0 . Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \leq M$ для некоторого $M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ и заключение теоремы следует из теоремы 5.3.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ для некоторой окрестности U точки x_0 , то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q -отображения $f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 соответственно. Известно, что дискретные открытые отображения в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо анти-сохраняют (см., например, раздел 4 гл. I в [8]). Пусть f для определенности сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D , а через $B_f(D')$ – множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \cup \{x_0\}$. Если x_0 – точка локальной гомеоморфности отображения f , то сформулированное выше утверждение очевидно. Пусть точка $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского

$$\dim B_f(D) = \dim f(B_f(D)) \leq n - 2,$$

(см., например, теорему 4.6 гл. I в [8]), где \dim обозначает топологическую размерность множества (см. [29]). Тогда получим

$$\dim f(B_f(D')) \leq n - 2, \tag{5.8}$$

так как $f(B_f(D')) = f(B_f(D)) \cup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает

$n - 2$ (см. [29; гл. III, раздел 3, следствие 1]). Пусть G – область в D' , $G \Subset D'$, и пусть $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (5.8) существует точка $y_0 \notin f(B_f(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y . В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$ (см. § 2 гл. I в [7]), имеем

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap \{f^{-1}(y_0)\}} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D' . Наконец, для любого $y \in f(D')$ в силу дискретности отображения f в области D множество $\{f^{-1}(y)\}$ не более чем счетно и потому $\dim\{f^{-1}(y)\} = 0$. Следовательно (см. [30; с. 333]), отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5.6 (аналог теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса). *Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f , то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty$, такая что $f(x_k) \rightarrow a, k \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h(f(x), a) \geq \varepsilon_0, \quad x \in U \setminus \{x_0\},$$

и по неравенству треугольника $d_0 = h(B(a, \varepsilon_0/2), f(U \setminus \{x_0\})) \geq \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\text{сар}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$. Отсюда по теореме 5.3 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0 , что противоречит первоначальному предположению.

ТЕОРЕМА 5.7. *Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенно особая точка отображения f , то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ емкости нуль такое, что*

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0 . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}, k = 1, 2, \dots$. Положим

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \tag{5.9}$$

По теореме 5.3 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (5.9) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость

нуль (см., например, [31; гл. III, раздел 3, п. 1.3, следствие]). Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \quad (5.10)$$

Из условия (5.10) вытекает существование последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, такой, что $x_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$ и $f(x_i) = y$, $i = 1, 2, \dots$. Теорема 5.7 доказана.

Пусть теперь D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, содержащая внешность некоторого шара $B(r_0)$, $r_0 > 0$. Будем говорить, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , если функция $\varphi^*(x) = \varphi(x/|x|^2)$ имеет конечное среднее колебание в точке нуль. Заметим, что отображение $\psi(x) = x/|x|^2$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S(0, 1/r)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, используя замену переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ (пишем $\varphi \in FMO(\infty)$), если

$$\int_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \quad R \rightarrow \infty,$$

где

$$\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}.$$

Аналогично, для бесконечности можно переформулировать условия вида (5.6), (5.7) следующим образом:

$$\int_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \quad (5.11)$$

$$\int_{S(0,R)} Q(x) dS = O([\log R]^{n-1}). \quad (5.12)$$

Будем говорить, что отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = \infty$* , если отображение $\tilde{f} = f(x/(|x|^2))$ является *кольцевым Q' -отображением в точке $x_0 = 0$* с $Q' = Q(x/(|x|^2))$. Иначе говоря, отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 = \infty$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S(R_1), S(R_2), A))) \leq \int_A Q(y) \eta^n(|y|) dm(y)$$

выполнено в кольце $A = A(R_1, R_2, 0) = \{R_1 < |y| < R_2\}$ для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta: (R_1, R_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{R_1}^{R_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

На основании теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.8 (аналог теоремы Лиувилля). Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = \infty$, функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.11), (5.12). Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) = 0$. В частности, f не может отображать все \mathbb{R}^n на ограниченную область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0$. Тогда в силу теоремы 5.5 отображение f продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $f: \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$. В таком случае множество $f(\overline{\mathbb{R}^n})$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $f(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$. Однако последнее противоречит сделанному предположению о том, что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0$.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть $f: \Delta \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – открытое дискретное Q -отображение, которое не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Если $Q(z)$ либо имеет конечное среднее колебание в нуле, либо удовлетворяет одному из условий типа (5.6), (5.7) в точке $z_0 = 0$, то отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q -отображения $\bar{f}: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме Стоилова о факторизации (см. раздел 5 гл. V в [32]). Согласно упомянутой теореме отображение f может быть представлено как композиция $f = \varphi \circ g$, где g – гомеоморфизм, φ – аналитическая функция. Не ограничивая общности, можно считать, что отображение g является Q -гомеоморфизмом в $\Delta \setminus \{0\}$. По лемме 4.1, теореме 4.1 и следствию 4.2 из [19] отображение g допускает гомеоморфное продолжение \bar{g} в Δ . В таком случае точка $\bar{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta)$ для функции φ . Из условия вытекает, что φ также не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность непрерывного продолжения для f следует теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций.

ТЕОРЕМА 5.10 (аналог теоремы Пикара при $n = 2$). Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – открытое дискретное Q -отображение, а $Q(z)$ либо имеет конечное среднее колебание в ∞ , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.11), (5.12). Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, может быть, двух.

§ 6. О точности условий на $Q(x)$ и отображение f

Следующие примеры показывают, что условия на функцию $Q(x)$ и отображение f , сформулированные в предыдущем параграфе, являются точными в некотором смысле. Прежде всего, условия на Q нельзя заменить более простым условием $Q(x) \in L^p_{\text{loc}}$ ни для какого сколь угодно большого $p > 1$.

ТЕОРЕМА 6.1. Для каждого $p > 1$ найдется открытое дискретное Q -отображение (более того, гомеоморфизм) $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, $n \geq 2$, для которого точка $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой

точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теорем 5.3, 5.6, 5.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим гомеоморфизм $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} \cdot x,$$

или, что то же самое, в сферических координатах $R = 1 + r^\alpha$, $\Theta = \vartheta$, где $\alpha \in (0, n/(p(n-1)))$. Не ограничивая общности, за счет увеличения p можно считать, что $\alpha < 1$. Заметим, что f отображает $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на $\{1 < |y| < 2\}$ в \mathbb{R}^n и предельное множество $C(f, 0) = \{|y| = 1\}$. Известно, что f является Q -гомеоморфизмом с

$$Q(x) := \left(\frac{1 + r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right)^{n-1}, \quad r = |x|$$

(см. предложение 6.3 гл. VI в [2]). При $r < 1$ имеем оценку

$$Q(x) \leq \frac{C}{r^{\alpha(n-1)}}, \quad C := \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{n-1}.$$

Следовательно, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, поскольку $\alpha p(n-1) < n$. Хотя $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой отображения f , предельное множество $C(f, 0)$ есть сфера $\{|y| = 1\} \neq \mathbb{R}^n$ и $\text{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$.

Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f в результатах предыдущего параграфа является существенным.

ТЕОРЕМА 6.2. *При каждом $n \geq 2$ найдется дискретное 1-отображение $g: \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ (т.е., отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.2) в области $D := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$ при $Q(x) \equiv 1$), для которого $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теорем 5.3, 5.6, 5.7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение пространства \mathbb{R}^n на кубы

$$C_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{i=1}^n [2k_i - 1, 2k_i + 1], \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим произвольный куб C_{k_1, \dots, k_n} с $k_1, \dots, k_n \geq 0$; случай k_i разных знаков может быть рассмотрен аналогично. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_{k_1, \dots, k_n}$. Если $k_1 = 0$, то $g_{m_1}(x) := x$. Пусть $k_1 > 0$. Положим

$$f_{1, \dots, 1, 1}(x) = y_{1, \dots, 1},$$

где $y_{1, \dots, 1, 1}$ – симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 1$. Если $2k_1 - 3 = -1$, то процесс завершен. Пусть $2k_1 - 3 > -1$, тогда

$$f_{1, \dots, 1, 2}(y_{1, \dots, 1}) = y_{1, \dots, 1, 2},$$

где $y_{1,\dots,1,2}$ – симметрическое отражение точки $y_{1,\dots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 3$. Если $2k_1 - 5 = -1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем процесс:

$$f_{1,\dots,1,3}(y_{1,\dots,1,2}) = y_{1,\dots,1,3}$$

и т.д. За конечное число шагов m_1 находим функцию

$$g_{m_1} = f_{1,\dots,1,m_1} \circ \dots \circ f_{1,\dots,1,1}$$

такую, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе C_{0,k_2,k_3,\dots,k_n} . Полагаем $x_{m_1} := g_{m_1}(x)$.

Далее, если $k_2 = 0$, то

$$g_{m_2}(x_{m_1}) = g_{m_1}(x_{m_1}).$$

При $k_2 > 0$ относительно точки x_{m_1} проделываем ту же операцию, но относительно координаты x_2 . Полагаем

$$f_{1,\dots,1,2,m_1}(x_{m_1}) = y_{1,\dots,1,2,m_1},$$

где $y_{1,\dots,1,2,m_1}$ – симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2 = 2k_2 - 1$. Если $2k_2 - 3 = -1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем до тех пор, пока не получим отображение

$$g_{m_2} = f_{1,\dots,m_2,m_1} \circ \dots \circ f_{1,\dots,2,m_1}$$

такое, что $g_{m_2}(x_{m_1}) \in C_{0,0,k_3,\dots,k_n}$. Полагаем

$$g_{m_1+m_2} := g_{m_2} \circ g_{m_1}, \quad x_{m_2} := g_{m_1+m_2}(x)$$

и т.д. Через некоторое число шагов $m_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ мы приходим к отображению

$$G_0 = g_{m_n} \circ g_{m_{n-1}} \circ \dots \circ g_{m_2} \circ g_{m_1}$$

такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0,\dots,0}$. Сжатие $G_1(x) = (\sqrt{n}/n) \cdot x$ переводит $C_{0,0,0,\dots,0}$ в некоторый куб A_0 , полностью лежащий в \mathbb{B}^n . Положим $G_2 := G_1 \circ G_0$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2 , причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \mathbb{B}^n$. Тогда отображение

$$g := G_2 \circ G_3, \tag{6.1}$$

где $G_3(x) = x/|x|^2$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n}. \tag{6.2}$$

По построению отображения g , заданного соотношением (6.1), видно, что оно сохраняет модуль семейств кривых в \mathbb{R}^n , т.е. оно является 1-отображением в терминах соотношения (1.2). Ясно также, что g – дискретное отображение. Заметим, что заключения теорем 5.3, 5.6, 5.7 не выполнены, в частности, в силу (6.2) не является справедливой теорема типа теоремы Сохоцкого, так как $\text{car}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{\mathbb{B}^n}) > 0$. Причина заключается в том, что g не является открытым отображением в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$.

§ 7. О приложениях и открытых проблемах

Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с конечным искажением длины (см., например, теорему 8.6 гл. VIII в [2]). Более того, все вышеизложенное справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ и почти всюду $\|f'(x)\|^n \leq K(x)J(x, f)$ для некоторой функции $K(x): D \rightarrow [1, \infty)$ (см., например, [26] и [27]). Иногда предполагают, что выполнено условие $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ вместо условия $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ (см. там же).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Каждое открытое дискретное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ с конечным искажением такое, что $K \in L_{\text{loc}}^{n-1}$ и мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю, является Q -отображением с $Q(x) = K^{n-1}(x)$ (см. замечание 8.5 и теорему 8.6 гл. VIII в [2]).

В известной работе [33] В. А. Зорича было сделано предположение о том, что аналог теоремы Пикара верен для отображений с ограниченным искажением; один из вариантов этой теоремы приведен в работе [34]. Аналог теоремы Пикара, сформулированный в настоящей статье относительно изучаемого класса отображений, пока что доказан авторами только при $n = 2$. К сожалению, пока неизвестно, верно ли аналогичное утверждение в пространствах больших размерностей. Другой важный вопрос, который пока относится к разряду открытых вопросов, связан с условием дискретности на отображение f в теоремах об устранении особенностей. Авторы предполагают, что оно так же, как и условие открытости, является существенным и не может быть отброшено.

Список литературы

- [1] Г. Д. Суворов, *Об искусстве математического исследования*, ТЕАН, Донецк, 1999.
- [2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2009.
- [3] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
- [4] Ю. Ф. Стругов, “Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем”, *Докл. АН СССР*, **243**:4, (1978), 859–861; англ. пер.: Yu. F. Strugov, “On the compactness of families of mappings that are quasi-conformal in the mean”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6, (1978), 1443–1446.
- [5] В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2005.
- [6] Ch. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22**, (2003), 1397–1420.
- [7] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [8] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **448**, (1969), 1–40.

- [10] C. Andreian Cazacu, “On the length-area dilatation”, *Complex Var. Theory Appl.*, **50**:7–11, (2005), 765–776.
- [11] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Distortion and singularities of quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **465**, (1970), 1–13.
- [12] В. М. Миклюков, “Граничные свойства n -мерных квазиконформных отображений”, *Докл. АН СССР*, **193**:3, (1970), 525–527; англ. пер.: V. M. Miklyukov, “Boundary properties of n -dimensional quasi-conformal mappings”, *Soviet Math. Dokl.*, **11**, (1970), 969–971.
- [13] P. Koskela, K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities”, *Israel J. Math.*, **136**:1, (2003), 269–283.
- [14] K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:11, (2004), 3251–3258.
- [15] В. И. Кругликов, “Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6), (1986), 185–206; англ. пер.: V. I. Kruglikov, “Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1, (1987), 185–205.
- [16] J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
- [17] F. W. Gehring, “Rings and quasiconformal mappings in space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:3, (1962), 353–393.
- [18] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:3, (1961), 415–426.
- [19] А. А. Игнатъев, В. И. Рязанов, “Конечное среднее колебание в теории отображений”, *Укр. матем. вестник*, **2**:3, (2005), 395–417; англ. пер.: A. A. Ignat’ev, V. I. Ryazanov, “Finite mean oscillation in the mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **2**:3, (2005), 403–424.
- [20] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [21] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**, Amer. Math. Soc., New York, 1942.
- [22] Э. Беккенбах, Р. Белман, *Неравенства*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.
- [23] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.
- [24] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; пер. с англ.: V. G. Maz’ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [25] P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: the zero set of the Jacobian”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **5**:2, (2003), 95–105.
- [26] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
- [27] T. Iwaniec, V. Šverák, “On mappings with integrable dilatation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:1, (1993), 181–188.
- [28] С. П. Пономарев, “ N^{-1} -свойство отображений и условие (N) Лузина”, *Матем. заметки*, **58**:3, (1995), 411–418; англ. пер.: S. P. Ponomarev, “The N^{-1} -property of maps and Luzin’s condition (N) ”, *Math. Notes*, **58**:3, (1995), 960–965.
- [29] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1948.
- [30] C. J. Titus, G. S. Young, “The extension of interiority, with some applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:2, (1962), 329–340.

- [31] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [32] С. Стойлов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Наука, М., 1964; пер. с фр.: S. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [33] В. А. Зорич, “Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3, (1967), 417–433; англ. пер.: V. A. Zorič, “A theorem of M. A. Lavrent’ev on quasiconformal space maps”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3, (1967), 389–403.
- [34] S. Rickman, “On the number of omitted values of entire quasiregular mappings”, *J. Analyse Math.*, **37**:1, (1980), 100–117.

Р. Р. Салимов (R. R. Salimov)

Институт прикладной математики и механики НАН

Украины, г. Донецк

E-mail: ruslan623@yandex.ru

Поступила в редакцию

23.01.2009 и 19.01.2010

Е. А. Севостьянов (E. A. Sevost'yanov)

Институт прикладной математики и механики НАН

Украины, г. Донецк

E-mail: brusin2006@rambler.ru