Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.925

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. О. Игнатьев

Аннотация. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости относительно части переменных нулевого решения импульсной системы при фиксированных моментах импульсного воздействия.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с импульсным воздействием, устойчивость, функция Ляпунова.

1. Введение

Постановка задачи об устойчивости движения относительно части переменных принадлежит А. М. Ляпунову. Однако сам Ляпунов этой задачей не занимался. Основы теории устойчивости относительно части переменных для моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, можно найти в монографиях [1–4]. В дальнейшем появился ряд работ, в которых исследуется устойчивость движений относительно части переменных, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями с запаздыванием (см., например, [5–8]). При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят «мгновенный» характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К первым работам в этом направлении следует отнести [9, 10]. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием явилась монография [11], в которой изложены основы этой теории. В последние годы заметно увеличилось число математических работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [12–17], что вызвано запросами новейшей техники. П. С. Семеновым и Д. Д. Байновым [18] поставлена задача об устойчивости решений систем с импульсным воздействием относительно части переменных и доказан ряд теорем. В работах [19, 20] получен ряд результатов, обобщающих результаты из [18]. Целью данной работы является получение достаточных условий асимптотической устойчивости относительно части переменных нулевого решения импульсной системы при фиксированных моментах импульсного воздействия.

2. Определения и некоторые предварительные результаты

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ t \neq \tau_k, \quad \Delta x = I_k(x),\ t = \tau_k, \tag{2.1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ — время, $k \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), τ_k — константы, $x \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1,\dots,f_n) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнения (2.1) описывают динамику системы, состоящей из двух частей: непрерывной (при $t \neq \tau_k$), описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, и дискретной (в моменты τ_k), когда решения системы получают скачкообразные изменения. Обозначим

$$B_H := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < H\right\},$$

$$G_k := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_{k-1} < t < \tau_k,\ x \in B_H\}, \quad G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Сформулируем гипотезы (Г1)–(Г5), которым может удовлетворять система (2.1).

(Г1) Функция $f = (f_1,\dots,f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ непрерывна в каждом из множеств G_k, $k \in \mathbb{N}$; $f(t,0) \equiv 0$, и существует константа $L > 0$ такая, что $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ при $(t,x_1) \in G$, $(t,x_2) \in G$, $x_1 \in B_H$, $x_2 \in B_H$.

(Г2) Функции $I_k : B_H \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны в B_H, и $I_k(0) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$.

(Г3) Существует константа $h \in (0,H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x + I_k(x) \in B_H$ при $k \in \mathbb{N}$.

(Г4) Константы τ_k удовлетворяют условиям

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty.$$

(Г5) Константы τ_k удовлетворяют условию: для любых $T > 0$, $t > 0$ отрезок $[t, t+T]$ содержит не более p констант τ_k, причем число p зависит только от T и не зависит от t.

Обозначим $x = (y,z)$, где $y = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m$, $z = (x_{m+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Будем обозначать через $x(t,t_0,x_0) = (y(t,t_0,x_0), z(t,t_0,x_0))$ при $t > t_0$ решение системы (2.1), удовлетворяющее условию $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$ в случае, если $t_0 \neq \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$. Если же $t_0 = \tau_k$ при каком-либо натуральном k, то под выражением $x(t,t_0,x_0)$ будем понимать $x(t, t_0 + 0, x_0 + I_k(x_0))$ (при $t > t_0$).

При выполнении гипотез (Г1)–(Г3) система (2.1) допускает тривиальное решение

$$x \equiv 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Тривиальное решение системы (2.1) называется *устойчивым относительно переменной* y (или *y-устойчивым*), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \delta$, то $\|y(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$. В противном случае нулевое решение уравнений (2.1) называется *неустойчивым относительно переменной* y.

Определение 2.2. Решение (2.2) системы (2.1) называется *притягивающим относительно переменной* y (или *y-притягивающим*), если для любого

$t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\eta = \eta(t_0) > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in B_\eta$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ такое, что $\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$.

Определение 2.3. Тривиальное решение системы (2.1) называется *асимптотически y-устойчивым*, если оно y-устойчиво и y-притягивающее.

Определение 2.4. Будем говорить, что функция $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}$ $(\omega \in \mathscr{K})$, если она непрерывна, строго возрастает и $\omega(0) = 0$.

Следуя [18, 14], введем определения.

Определение 2.5. Будем говорить, что функция $V : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathscr{V}_0$ $(V \in \mathscr{V}_0)$, если V непрерывна на любом из множеств G_k, $V(t, 0) \equiv 0$ для $t \in \mathbb{R}_+$, существуют конечные пределы

$$V(t_0 - 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0),\\ (t,x)\in G_k}} V(t, x), \quad V(t_0 + 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0),\\ (t,x)\in G_{k+1}}} V(t, x)$$

и справедливо равенство $V(t_0 - 0, x_0) = V(t_0, x_0)$.

Пусть $f(t, x)$ является C^{j-1}-функцией: $f : G \to \mathbb{R}^n$, а V является C^j-функцией $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Определим $V_s : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}^n$, полагая

$$V_s(t, x) := \frac{\partial V_{s-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_{s-1}}{\partial x_i} f_i(t, x), \quad s = 1, 2, \ldots, j,$$

при $t \neq \tau_k$ и $V_s(\tau_k, x) = V_s(\tau_k - 0, x)$, где $V_0(t, x) := V(t, x)$. В частности,

$$V_1(t, x) = \frac{dV}{dx}\bigg|_{(2.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x).$$

Определение 2.6. Будем говорить, что функция $V : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathscr{V}_m$ $(V \in \mathscr{V}_m)$, если V является m раз непрерывно дифференцируемой на любом из множеств G_k и существуют конечные пределы

$$V_r(t_0 - 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0),\\ (t,x)\in G_k}} V_r(t, x), \quad V_r(t_0 + 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0),\\ (t,x)\in G_{k+1}}} V_r(t, x),$$

$r = 0, 1, \ldots, m$. Здесь $V_0 = V$.

Обозначим $u = (x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l$, где $m \leq l \leq n$. В дальнейшем символом $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму вектора любой размерности. В работах [19, 20] показано, что если система (2.1) такова, что выполнены гипотезы (Г1)–(Г4) и существуют функции $V \in \mathscr{V}_1$, $a, b, c \in \mathscr{K}$ такие, что

$$\begin{gathered} a(\|y\|) \leq V(t, x) \leq b(\|u\|) \quad \text{при } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_H, \\ \frac{dV}{dt}\bigg|_{(2.1)} \leq -c(\|u\|) \quad \text{при } (t, x) \in G, \\ V(\tau_k + 0, I_k(x) + x) - V(\tau_k, x) \leq 0 \quad \text{при } k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

то решение (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Целью настоящей работы является получение более мягких условий асимптотической устойчивости в предположении, что функция V удовлетворяет условию $dV/dt \leq 0$ вместо (2.3).

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 2.1. *Пусть $h(t)$ — скалярная функция, имеющая точки разрыва первого рода при $t = b_1$, $t = b_2, \dots,$ где $0 < b_1 < b_2 < \dots,$ $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = \infty$, причем $h(b_i - 0) = h(b_i)$, и пусть в каждом из интервалов (b_i, b_{i+1}) функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема $j+1$ раз, ее производные $h'(t), h''(t), \dots, h^{(j+1)}$ ограничены при $t \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(b_i, b_{i+1}]$ и выполняется условие: константы b_i удовлетворяют гипотезе* (Г5) *и*

$$\lim_{i\to\infty}[h(b_i+0) - h(b_i-0)] = 0, \quad \lim_{i\to\infty}[h^{(r)}(b_i+0) - h^{(r)}(b_i-0)] = 0, \quad r = 1, \dots, j.$$

Тогда если

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0, \tag{2.4}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} h^{(r)}(t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, j.$$

Замечание 2.1. Под производными любого порядка в точках b_i будем понимать левосторонние производные.

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\lim_{t\to\infty} h'(t) = 0. \tag{2.5}$$

Предположим противное: пусть существуют $\xi > 0$ и моменты времени $T_m \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что $T_m \to \infty$ при $m \to \infty$ и $|h'(T_m)| \ge 2\xi$. Это означает, что либо $h'(T_m) \ge 2\xi$, либо $h'(T_m) \le -2\xi$. Из ограниченности $h''(t)$ и условий

$$\lim_{i\to\infty}[h'(b_i+0) - h'(b_i-0)] = 0$$

следует, что существуют $\zeta > 0$ и $M_1 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$h'(t) \ge \frac{3}{2}\xi \tag{2.6}$$

или

$$h'(t) \le -\frac{3}{2}\xi \tag{2.7}$$

при $t \in [T_m - \zeta, T_m + \zeta]$, $m \ge M_1$. Отсюда, воспользовавшись условиями леммы, получаем, что существует $M_2 \in \mathbb{N}$ $(M_2 \ge M_1)$ такое, что при $m \ge M_2$ выполняется условие

$$h(T_m + \zeta) \ge h(T_m) + \xi\zeta \tag{2.8}$$

в случае (2.6) или условие

$$h(T_m + \zeta) \le h(T_m) - \xi\zeta \tag{2.9}$$

в случае (2.7). Из предельного соотношения (2.4) следует, что существует такое $M \ge T_{M_2} > 0$, что $|h(t)| < \frac{1}{2}\xi\zeta$ при $t \ge M$. С другой стороны, из неравенств (2.8), (2.9) вытекает справедливость неравенств

$$|h(T_m + \zeta)| \ge \frac{1}{2}\xi\zeta \quad \text{при } m \in \mathbb{N}, \quad T_m \ge M.$$

Но эти неравенства противоречат предположению (2.4). Полученное противоречие доказывает справедливость предельного соотношения (2.5).

Аналогично можно показать что

$$\lim_{t\to\infty} h''(t) = 0, \dots, \lim_{t\to\infty} h^{(j)}(t) = 0.$$

Лемма доказана.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть система* (2.1) *такова, что* $f \in C^j$ *при* $(t,x) \in G$, *выполняются гипотезы* (Г1)–(Г4) *и существуют* $V \in \mathscr{V}_{j+1}$, $w_1 \in \mathscr{K}$, $w_2 \in \mathscr{K}$ *такие, что*

(А) $V(t,x) \ge w_1(\|y\|)$ *при* $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B_H$,

(Б) $V_1(t,x) = \frac{dV}{dt} \le 0$ *при* $(t,x) \in G$,

(В) $V_s(t,x)$ $(s = 1,\dots,j+1)$ *ограничены при* $(t,x) \in G$,

(Г) $\sum\limits_{s=1}^{j} V_s^2(t,x) \ge w_2(\|y\|)$,

(Д) $V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \le 0$ *при* $x \in B_H$, $k \in \mathbb{N}$,

(Е) *константы* τ_k *удовлетворяют гипотезе* (Г5) *и справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{k\to\infty} [V_r(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V_r(\tau_k, x)] = 0 \quad (r = 0,1,\dots,j)$$

равномерно по $x \in B_H$.

Тогда решение (2.2) *системы* (2.1) *асимптотически устойчиво относительно* y.

Доказательство. Из условий (А), (Б), (Д) в силу [18] следует, что решение (2.2) системы (2.1) устойчиво относительно y. Возьмем произвольные $\varepsilon \in (0,H)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $x_0 \in B_\delta$, где $\delta > 0$ таково, что $\|y(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$. Обозначим $v(t) = V(t, x(t,t_0,x_0))$[1]. Функция $v(t)$ положительна и не возрастает, следовательно, существует предел

$$\eta = \lim_{t\to\infty} v(t) \ge 0. \tag{3.1}$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = 0, \tag{3.2}$$

где $v_1(t) = V_1(t, x(t,t_0,x_0))$. Предположим противное, т. е. будем считать, что предельное соотношение (3.2) не выполняется. Тогда существуют $\beta > 0$ и последовательность $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ $(T_i \in \mathbb{R}_+,\ i \in \mathbb{N},\ T_{i+1} > T_i,\ T_i \to \infty$ при $i \to \infty)$ такая, что $v_1(T_i) \le -2\beta < 0$. Согласно условиям (А), (Б), (В), (Е) теоремы существуют $\gamma > 0$ и $M_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $v_1(t) \le -\beta$ при $t \in [T_i, T_i + \gamma]$, $i \ge M_1$. Из условий (Б), (Д) следует, что

$$v(T_i + \gamma) \le v(T_i) - \beta\gamma \tag{3.3}$$

при $i \ge M_1$. Так как $\lim\limits_{i\to\infty} v(T_i) = \eta$, отсюда и из (3.3) вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty} v(T_i + \gamma) \le \eta - \beta\gamma.$$

Но поскольку $T_i + \gamma \to \infty$ при $i \to \infty$, последнее неравенство противоречит предельному соотношению (3.1). Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (3.2).

Используя предельное соотношение (3.2) и лемму 2.1, получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{s=1}^{j} v_s^2(t) = 0, \tag{3.4}$$

[1] Под $v(\tau_k)$ по-прежнему будем понимать $v(\tau_k - 0)$.

где $v_s(t) = V_s(t, x(t, t_0, x_0))$. Покажем теперь, что нулевое решение системы (2.1) является y-притягивающим. Для этого нужно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t, t_0, x_0)\| = 0. \tag{3.5}$$

Предположим противное: пусть существуют $\alpha > 0$ и последовательность $\{t_i\}$ ($i \in \mathbb{N}$, $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$) такие, что $\|y(t_i, t_0, x_0)\| \geq \alpha$. Из условия (Г) следует, что

$$\sum_{s=1}^{j} v_s^2(t_i) \geq w_2(\|y(t_i, t_0, x_0)\|) \geq w_2(\alpha) > 0.$$

Полученное неравенство противоречит (3.4), откуда вытекает справедливость предельного соотношения (3.5). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если в доказанной теореме положить $j = 1$, $I_k(x) \equiv 0$, то получаем обобщение теоремы Гладилиной [19, 20] (здесь не требуется выполнения неравенства $V(t, x) \leq b(\|u\|)$). При $j = 1$, $x = y$, $I_k(x) \equiv 0$ получаем известную теорему Марачкова [21].

Обозначим $Q_h := \{(t, x) : t \in \mathbb{R}_+,\ \|y\| \leq h,\ \|z\| < \infty,\ V(t, x) > 0\}$.

Теорема 3.2. *Пусть система* (2.1) *такова, что* $f \in C^j$ *при* $(t, x) \in G$, *выполняются гипотезы* (Г1)–(Г4) *и существуют функции* $V \in \mathscr{V}_{j+1}$ *и* $w \in \mathscr{K}$ *такие, что*

(а) *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$, $h \in (0, H)$, $\delta \in (0, H)$ *множество* $Q_h \cap B_\delta$ *непусто;*

(б) $V(t, x), V_1(t, x), \ldots, V_{j+1}(t, x)$ *ограничены в* Q_H*;*

(в) $dV/dt = V_1(t, x) \geq 0$ *в* Q_H*;*

(г) $\sum\limits_{s=1}^{j} V_s^2(t, x) \geq w(V(t, x))$*;*

(д) $\Delta V|_{t=\tau_k} = V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0$ *при* $x \in B_H$, $k \in \mathbb{N}$,

(е) *выполняется условие* (Е) *теоремы* 3.1.

Тогда решение (2.2) *системы* (2.1) *y-неустойчиво.*

Доказательство. Выберем произвольные $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, и пусть δ — сколь угодно малое положительное число. Покажем, что существуют $x_0 \in B_\delta$ и $t_1 > t_0$ такие, что $\|y(t_1, t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$. Выберем $x_0 \in B_\delta$ таким образом, что $V(t_0, x_0) > 0$. Такой выбор возможен в силу условия (а).

Предположим противное: при любом $t > t_0$ выполняется неравенство

$$\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \tag{3.6}$$

откуда следует, что $(t, x) \in Q_\varepsilon$, и функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ ограничена. Из условий (в), (д) имеем

$$v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq V(t_0, x_0) = \beta > 0.$$

Функция $v(t)$ ограничена и не убывает, следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \eta \geq \beta > 0.$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3.1, можно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} v_s(t) = 0, \quad s = 1, \ldots, j,$$

где $v_s = V_s(t, x(t, t_0, x_0))$, откуда получаем, что имеет место предельное соотношение (3.4). Из условия (г) следует, что

$$\sum_{s=1}^{j} v_s^2(t) = \sum_{s=1}^{j} V_s^2(t, x(t, t_0, x_0)) \geq w(V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq w(\beta) > 0 \tag{3.7}$$

при $t \geq t_0$. Однако соотношения (3.4) и (3.7) противоречат друг другу. Полученное противоречие показывает, что предположение (3.6) неверно, т. е. решение (2.2) системы (2.1) y-неустойчиво.

Пример 3.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - a(t)(2+\sin z)y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1, \quad \frac{dz}{dt} = \sin y_2, \quad t \neq \tau_k \ (k = 1, 2, \dots),$$
$$\Delta y_1|_{t=\tau_k} = -\frac{y_1}{k}, \quad \Delta y_2|_{t=\tau_k} = 0, \quad \Delta z|_{t=\tau_k} = 0, \tag{3.8}$$

где $a(t) = 1 - \cos t$, $\tau_k = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Система (3.8) допускает тривиальное решение

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z = 0. \tag{3.9}$$

Для исследования устойчивости этого решения воспользуемся функцией Ляпунова $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Находим последовательно

$$V_1 = \frac{dV}{dt} = -a(t)(2+\sin z)y_1^2,$$

$$V_2 = \frac{dV_1}{dt} = [-a'(2+\sin z) + 2a^2(2+\sin z)^2]y_1^2 - 2a(2+\sin z)y_1y_2 + \psi_1,$$

$$V_3 = \frac{dV_2}{dt} = [-a''(2+\sin z) + \varphi_1(t,z)]y_1^2 + \varphi_2(t,z)y_1y_2 - 2a(2+\sin z)y_2^2 + \psi_2,$$

$$V_4 = \frac{dV_3}{dt} = \lambda_1(t,z)y_1^2 + \lambda_2(t,z)y_1y_2 + \lambda_3(t,z)y_2^2 + \psi_3,$$

$$V_5 = \frac{dV_4}{dt} = \lambda_4(t,z)y_1^2 + \lambda_5(t,z)y_1y_2 + [-12a''(2+\sin z) + \varphi_3(t,z)]y_2^2 + \psi_4,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ — функции, ограниченные в области

$$t \geq 0, \quad |z| < \infty, \tag{3.10}$$

причем $\varphi_i(2\pi n, z) \equiv 0$ при $n \in \mathbb{Z}$; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — функции, ограниченные в области

$$t \geq 0, \quad y_1^2 + y_2^2 \leq H^2 \quad (H = \mathrm{const}), \quad |z| < \infty \tag{3.11}$$

и имеющие порядок малости по y_1, y_2 более высокий, чем второй; эти функции удовлетворяют условиям

$$|\psi_s(t, y_1, y_2, z)| \leq M\big(y_1^2 + y_2^2\big)^{3/2}, \quad M = \mathrm{const}, \ s = 1, 2, 3, 4.$$

Рассмотрим функцию $W = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2$. Покажем, что $W(t, x, y)$ — функция, определенно положительная относительно y_1 и y_2. Представим ее в виде $W = W_1 + W_2$, где W_1 — форма четвертого порядка относительно y_1 и y_2 с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями переменных t и z

в области (3.10), а W_2 включает в себя слагаемые более высокой степени, чем 4, относительно переменных y_1 и y_2. Покажем, что

$$W(t_n, y_1, y_2, z)|_{t=2\pi n, n\in\mathbb{Z}} \geq w(\|y\|), \quad w \in \mathscr{K}.$$

Представим $W_1 = W_1(t, y_1, y_2, z)$ в виде $W_1 = c_1 y_1^4 + c_2 y_1^3 y_2 + c_3 y_1^2 y_2^2 + c_4 y_1 y_2^3 + c_5 y_2^4$, где $c_i = c_i(t, z)$, $i = 1, \dots, 5$, — функции, ограниченные в области (3.10).

Учитывая, что $a(2\pi n) = 0$, $a'(2\pi n) = 0$, $\varphi_1(2\pi n, z) = 0$, $\varphi_2(2\pi n, z) = 0$, $\varphi_3(2\pi n, z) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, получаем $W_1(2\pi n, 0, y_2, z) \geq 144(2 + \sin z)^2 y_2^4 \geq 144 y_2^4$, $W_1(2\pi n, y_1, 0, z) \geq (2 + \sin z)^2 y_1^4 \geq y_1^4$. Пусть v_i — это квадратичная часть функции V_i $(i = 1, \dots, 5)$ относительно y_1, y_2. Тогда

$$v_1(2\pi n, y_1, y_2, z) = 0, \quad v_1(2\pi n, y_1, y_2, z) = 0, \quad v_3(2\pi n, y_1, y_2, z) = -(2 + \sin z) y_1^2,$$
$$v_5(2\pi n, y_1, y_2, z) = \lambda_4(2\pi n, z) y_1^2 + \lambda_5(2\pi n, z) y_1 y_2 - 12(2 + \sin z) y_2^2,$$
$$W_1(2\pi n, y_1, y_2, z) \geq v_3^2(2\pi n, y_1, y_2, z) + v_5^2(2\pi n, y_1, y_2, z).$$

Так как λ_4 и λ_5 ограничены и $v_5(2\pi n, 0, y_2, z) = -12(2 + \sin z) y_2^2$, получаем, что $W_1(2\pi n, y_1, y_2, z) \geq 2\eta_1 \big(y_1^2 + y_2^2\big)^2$, где $\eta_1 > 0$ — некоторая константа. Функции $\varphi_3(t, z)$, $c_1(t, z)$, $c_2(t, z)$, $c_3(t, z)$, $c_4(t, z)$, $c_5(t, z)$ являются равномерно непрерывными в области (3.10), следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $W_1(t, y_1, y_2, z) \geq \eta_1 \big(y_1^2 + y_2^2\big)^2$, $-12 \cos t (2 + \sin z) \leq -1$ при $t \in [2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]$. Покажем, что $W_1(t, y_1, y_2, z)$ определенно положительна относительно y_1, y_2 также при $t \notin [2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]$.

Учитывая, что $v_1(t, y_1, y_2, z) \leq -\varepsilon(2 + \sin z) y_1^2 \leq -\varepsilon y_1^2$ при $t \notin [2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]$, где ε — некоторое положительное число, получаем, что при таких t справедливы неравенства $W_1(t, y_1, y_2, z) \geq v_1^2(t, y_1, y_2, z) + v_5^2(t, y_1, y_2, z) \geq \varepsilon^2 y_1^4 + v_5^2(t, y_1, y_2, z) \geq \eta_2 \big(y_1^2 + y_2^2\big)^2$, где $\eta_2 > 0$ — некоторая константа.

Положив $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\} > 0$, приходим к тому, что $W_1(t, y_1, y_2, z) \geq \eta \big(y_1^2 + y_2^2\big)^2$ при $t \geq 0$, $y_1^2 + y_2^2 \leq H^2$, $|z| < \infty$. Полагая в (3.11) H достаточно малым, получаем, что в области (3.11) функция W определенно положительна относительно y_1, y_2, т. е. существует $w \in \mathscr{K}$ такая, что $W \geq w\big(y_1^2 + y_2^2\big)$ в области (3.11). Найдем теперь

$$\Delta V|_{t=\tau_k} = \frac{1}{2}[(y_1 + \Delta y_1|_{t=\tau_k})^2 + (y_2 + \Delta y_2|_{t=\tau_k})^2] - \frac{1}{2}\big(y_1^2 + y_2^2\big) = -\frac{y_1^2}{k}(1 - 1/2k) \leq 0.$$

Из структуры функций V_i $(i = 1, \dots, 5)$ видно, что они обладают свойством $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta V_i|_{t=\tau_k} = 0$ $(i = 1, \dots, 5)$.

Таким образом, условия (A)–(E) теоремы 3.1 выполнены, и можно утверждать, что решение (3.9) системы (3.8) асимптотически устойчиво относительно y.

Пример 3.2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 + a(t)(2 + \sin z) y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1, \quad \frac{dz}{dt} = \sin y_2, \quad t \neq \tau_k, \tag{3.12}$$
$$\Delta y_1|_{t=\tau_k} = \frac{y_1}{k}, \quad \Delta y_2|_{t=\tau_k} = 0, \quad \Delta z|_{t=\tau_k} = 0,$$

где $k = 1, 2, \dots$, $a(t)$ и τ_k такие же, как в предыдущем примере. Система (3.12) допускает нулевое решение (3.9). Покажем, что оно y-неустойчиво. Рассмотрим функцию $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Находим $\frac{dV}{dt} = a(t)(2 + \sin z) y_1^2$. Аналогично предыдущему примеру можно показать, что существует такая $w \in \mathscr{K}$, что $W = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 \geq w\big(y_1^2 + y_2^2\big)$, т. е. все условия теоремы 3.2 выполнены, следовательно, нулевое решение системы (3.12) y-неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

2. *Воротников В. И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.

3. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1989.

4. *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.

5. *Ignatyev A. O.* On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 268, N 2. P. 615–628.

6. *Андреев А. С., Павликов С. В.* Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 1. С. 3–12.

7. *Bernfeld S., Corduneanu C., Ignatyev A. O.* On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Anal. 2003. V. 55, N 6. P. 641–656.

8. *Corduneanu C., Ignatyev A. O.* Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2005. V. 10, N 1. P. 11–24.

9. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 2. С. 233–237.

10. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. 1967. Т. 74, № 2. С. 202–208.

11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.

12. *Borysenko S. D., Iovane G., Giordano P.* Investigations of the properties motion for essential nonlinear systems perturbed by impulses on some hypersurfaces // Nonlinear Anal. 2005. V. 62, N 2. P. 345–363.

13. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1516–1521.

14. *Гладилина Р. И, Игнатьев А. О.* Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 44–51.

15. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 10. С. 117–132.

16. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Устойчивость решений импульсных систем // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 1. С. 98–111.

17. *Kenzhebaev K. K., Stanzhitskii A. N.* Invariant sets of impulsive systems and their stability // Nonlinear Oscillations. 2004. V. 7, N 1. P. 78–82.

18. *Simeonov P. S., Bainov D. D.* Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 117, N 1. P. 247–263.

19. *Гладилина Р. И.* Об устойчивости по части переменных в системах с импульсным воздействием // Тр. ИПММ НАН Украины. 2003. Т. 8. С. 7–18.

20. *Гладилина Р. И.* Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости по части переменных для систем с импульсным воздействием // Тр. ИПММ НАН Украины. 2004. Т. 9. С. 46–52.

21. *Марачков В. П.* Об одной теореме устойчивости // Изв. физ.-мат. о-ва и научно-исслед. ин-та мат. и механ. при Казанском ун-те. Сер. 3. 1940. Т. 12. С. 171–174.

Статья поступила 28 июля 2006 г.

Игнатьев Александр Олегович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
`mila@budinf.donetsk.ua`, `ignat@iamm.ac.donetsk.ua`, `aoignat@mail.ru`