Математические заметки

том 74 выпуск 5 ноябрь 2003

УДК 517.9

О СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КЛАССОВ

А. А. Ковалевский

Устанавливается существование принадлежащего некоторому соболевскому пространству слабого решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с правой частью из широкого класса функций, определяемого с помощью логарифмической функции.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ и $p \in (1,n)$. Пусть c_1, c_2 – положительные постоянные, g – неотрицательная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$, и пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x,\xi)| \leqslant c_1|\xi|^{p-1} + g(x), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_2|\xi|^p. \tag{2}$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{3}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,\nabla u) &= f \quad \text{в} \ \ \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{на} \ \ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Изучению разрешимости и свойств решений задачи (4) с f из $L^1(\Omega)$ или из класса ограниченных мер посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1]–[4]).

Далее будем считать, что $f \in L^1(\Omega)$.

Определение 1. *Слабым решением* задачи (4) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такую, что выполняются условия

1) для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ $a_i(x,\nabla u) \in L^1(\Omega)$;
2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla u) D_i\varphi \right\} dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

По поводу этого определения см., например, [2].

Положим

$$r = \frac{n(p-1)}{n-1}.$$

В работе [2] показано, что если $p > 2 - 1/n$, то существует слабое решение задачи (4), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [1,r)$. При этом показатель $\lambda = r$, вообще говоря, недостижим. Однако, как установлено в [2], если $p > 2 - 1/n$ и $f\ln(1+|f|) \in L^1(\Omega)$, то слабое решение задачи (4), принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, существует. Недавно в статье автора [5] было доказано существование слабого решения задачи (4), принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, при условиях $p \geqslant 2 - 1/n$ и

$$f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega), \tag{5}$$

где $\sigma \in ((n-1)/n, 1)$. Оказывается, что и этот результат допускает усиление. А именно, для того, чтобы утверждение о существовании слабого решения рассматриваемой задачи, принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, оставалось в силе, достаточно в условии (5) множитель при f заменить на произведение произвольного конечного числа последовательных суперпозиций логарифмической функции от $|f|$, взятых в степени $(n-1)/n$, и следующей такой суперпозиции в степени $\sigma > (n-1)/n$. Доказательство данного факта является целью настоящей заметки.

Дадим точную формулировку основного результата статьи.

Определим последовательность чисел s_j следующим образом:

$$s_1 = 1, \qquad s_j = e^{s_{j-1}}, \quad j = 2,3,\dots .$$

Пусть теперь для любого $j \in \mathbb{N}$ $b_j\colon [s_j,+\infty) \to [0,+\infty)$ – функция такая, что

$$b_j(s) = \underbrace{\ln\dots\ln\ln}_{j} s, \qquad s \in [s_j,+\infty).$$

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 2 - 1/n$, и пусть выполняется условие: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$ такие, что*

$$f\left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j+|f|)\right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1}+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega). \tag{6}$$

Тогда существует слабое решение задачи (4), *принадлежащее* $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1 будет сведено к применению результатов работы [3] и устанавливаемого в следующем пункте нового результата о суммируемости функций, удовлетворяющих некоторому семейству интегральных неравенств (теорема 2).

2. Суммируемость функций, подчиненных некоторым интегральным неравенствам. Прежде всего заметим, что если $j \in \mathbb{N}$ и $s > s_j$, то $b_j(s) > 0$.

Лемма 1. *Пусть u – измеримая функция на Ω. Пусть $M > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon > 1$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant M k^{-\tau} \left[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\right]^{-1} [b_{m+1}(k)]^{-\varepsilon}. \tag{7}$$

Тогда $u \in L^{\tau}(\Omega)$ и имеет место оценка

$$\int_{\Omega} |u|^{\tau}\, dx \leqslant (e s_{m+2})^{\tau} \operatorname{meas}\Omega + \frac{2^{m+\varepsilon} e^{\tau} M}{\varepsilon - 1}. \tag{8}$$

Доказательство. Ограничимся предположением, что $m \geqslant 2$. Случай $m = 1$ рассматривается аналогично.

Пусть k_0 – натуральное число такое, что $s_{m+1} < k_0 \leqslant s_{m+1} + 1$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$, положим

$$\beta_k = \left[k \prod_{j=1}^{m-1} b_j(k)\right]^{-1} [b_m(k)]^{-\varepsilon}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$. В силу (7) имеем

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant e^k\} \leqslant M e^{-\tau k} \beta_k.$$

Тогда

$$\int_{\{e^k \leqslant |u| < e^{k+1}\}} |u|^{\tau}\, dx \leqslant M e^{\tau} \beta_k. \tag{9}$$

Теперь, учитывая, что в силу условия $\varepsilon > 1$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k \leqslant \frac{2^{m+\varepsilon}}{\varepsilon - 1} [b_m(k_0)]^{1-\varepsilon},$$

из (9) выводим, что $u \in L^{\tau}(\Omega)$ и верна оценка

$$\int_{\Omega} |u|^{\tau}\, dx \leqslant e^{\tau k_0} \operatorname{meas}\Omega + \frac{2^{m+\varepsilon} e^{\tau} M}{\varepsilon - 1} [b_m(k_0)]^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда, принимая во внимание выбор числа k_0, получаем неравенство (8). Лемма доказана.

Положим $p^* = np/(n-p)$. Известно (см., например, [6]), что существует положительная постоянная c_0, зависящая только от n и p, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \leqslant c_0 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{10}$$

Пусть для любого $k > 0$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть u – функция на Ω. Пусть $k > 0$ и $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда множество $\{|u| \geqslant k\}$ измеримо и справедливо неравенство*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant (c_0/k)^{p^*} \left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \right)^{p^*/p}. \tag{11}$$

Доказательство. Измеримость множества $\{|u| \geqslant k\}$ следует из равенства $\{|u| \geqslant k\} = \{|T_k(u)| = k\}$ и измеримости функции $T_k(u)$. В силу того же равенства имеем

$$k^{p^*} \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_\Omega |T_k(u)|^{p^*} \, dx.$$

Отсюда и из неравенства (10), примененного к функции $T_k(u)$, выводим (11). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть u – функция на Ω, и пусть для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда для любых $N, k, k_1 > 0$ имеем*

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geqslant k\} \leqslant (c_0/k_1)^{p^*} \left(\int_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p \, dx \right)^{p^*/p} \\ + k^{-p} \int_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p \, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $N, k, k_1 > 0$. Положим $E = \{|u| < k_1, |\nabla T_N(u)| \geqslant k\}$. Ясно, что

$$\operatorname{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geqslant k\} \leqslant \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k_1\} + \operatorname{meas} E. \tag{13}$$

Учитывая, что $k \leqslant |\nabla T_N(u)|$ на E,

$$\begin{aligned} &\nabla T_N(u) = \nabla T_{k_1}(u) \quad &&\text{п.в. на } \{|u| \leqslant N\} \cap \{|u| \leqslant k_1\}, \\ &\nabla T_N(u) = 0 &&\text{п.в. на } \{|u| > N\}, \end{aligned}$$

получаем

$$k^p \operatorname{meas} E \leqslant \int_E |\nabla T_N(u)|^p \, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p \, dx.$$

Отсюда, из (13) и леммы 2 выводим (12). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть u – функция на Ω, $\lambda \geqslant 1$, и пусть для любого $N \in \mathbb{N}$ $T_N(u) \in W^{1,\lambda}(\Omega)$. Пусть последовательность $\{T_N(u)\}$ ограничена в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_N(u) \to u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{T_N(u)\}$ в $L^\lambda(\Omega)$, поточечной сходимости этой последовательности к u в Ω, леммы Фату и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$T_N(u) \to u \quad \text{сильно в} \quad L^\lambda(\Omega). \tag{14}$$

Далее, пусть $i \in \{1,\dots,n\}$. Используя тот факт, что для произвольных $k, k_1 \in \mathbb{N}$, $k < k_1$,

$$D_iT_k(u) = D_iT_{k_1}(u) \quad \text{п.в. на} \quad \{|u| \leqslant k\},$$

устанавливаем: существует функция $v_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$v_i = D_iT_N(u) \quad \text{п.в. на} \quad \{|u| \leqslant N\}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$D_iT_N(u) \to v_i \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{16}$$

Кроме того, из (15) и определения функций T_Nвытекает, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$|D_iT_N(u)| \leqslant |v_i| \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{17}$$

В силу ограниченности последовательности $\{D_iT_N(u)\}$ в $L^\lambda(\Omega)$, (16) и леммы Фату имеем $v_i \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда, используя (16), (17) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$D_iT_N(u) \to v_i \quad \text{сильно в} \quad L^\lambda(\Omega). \tag{18}$$

Из (14) и (18) следует, что существует обобщенная производная D_iu, $D_iu = v_i$ п.в. на Ω. Теперь ясно, что $D_iu \in L^\lambda(\Omega)$ и $D_iT_N(u) \to D_iu$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Поскольку это верно для любого $i \in \{1,\dots,n\}$, то, учитывая (14), заключаем, что $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_N(u) \to u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть Φ – неотрицательная измеримая функция на Ω, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$, и пусть*

$$\Phi\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j+\Phi)\biggr]^{(n-1)/n}[b_{m+1}(s_{m+1}+\Phi)]^\sigma \in L^1(\Omega).$$

Пусть $p \geqslant 2-1/n$, u – функция на Ω, и пусть для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant \int_\Omega \Phi\,|T_k(u)|\,dx. \tag{19}$$

Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Доказательство. Через c_i, $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, m, σ, $\operatorname{meas}\Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции

$$\Phi\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j + \Phi)\biggr]^{(n-1)/n}[b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^{\sigma}.$$

Определим числа t_j следующим образом:

$$t_1 = 4, \qquad t_j = e^{t_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, m+1.$$

Положим

$$\gamma = \frac{p-1}{2p}, \qquad \gamma_1 = \max(e^{1/\gamma^2}, t_{m+1}).$$

Зафиксируем $k \geqslant \gamma_1$. Имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, и в силу (19) справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant k^\gamma \int_\Omega |T_k(u)|\,dx + k\int_{\{\Phi > k^\gamma\}} \Phi\,dx. \tag{20}$$

Используя (10) и неравенства Гёльдера и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} k^\gamma \int_\Omega |T_k(u)|\,dx &\leqslant c_0 k^\gamma (\operatorname{meas}\Omega)^{(p^*-1)/p^*}\biggl(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx\biggr)^{1/p} \\ &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx + \frac{p-1}{p}\,c_3 k^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (20) следует, что

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant c_3 k^{1/2} + 3k\int_{\{\Phi > k^\gamma\}} \Phi\,dx. \tag{21}$$

Оценим интеграл в правой части (21). Прежде всего заметим, что в силу неравенства $k \geqslant t_{m+1}$ и определения чисел t_j для любого $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$b_j(k) \geqslant 4. \tag{22}$$

Очевидно, что имеет место следующее свойство:

$$\text{если} \quad s > k^\gamma, \quad \text{то} \quad b_1(s_1 + s) > \gamma\, b_1(k). \tag{23}$$

Используя (22), (23) и неравенство $\ln k \geqslant 1/\gamma^2$, устанавливаем, что если $s > k^\gamma$, то для любого $j \in \{2, \dots, m+1\}$ справедливо неравенство $b_j(s_j + s) > b_j(k)/2$. Этот факт и свойство (23) позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} &\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j + \Phi)\biggr]^{(n-1)/n}[b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^{\sigma} \\ &\qquad > \gamma^{m+\sigma}\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\biggr]^{(n-1)/n}[b_{m+1}(k)]^{\sigma} \quad \text{на} \ \ \{\Phi > k^\gamma\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\{\Phi>k^\gamma\}} \Phi\,dx \leqslant c_4 \biggl[\prod_{j=1}^m b_j(k)\biggr]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \tag{24}$$

Заметим, что для произвольных $\lambda, s > 0$ имеет место неравенство

$$\lambda \ln s < s^\lambda. \tag{25}$$

Воспользовавшись этим, получаем

$$\biggl[\prod_{j=1}^m b_j(k)\biggr]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{\sigma} < [2(m+\sigma)]^{m+\sigma} k^{1/2}. \tag{26}$$

Из неравенств (21), (24) и (26) выводим, что для любого $k \geqslant \gamma_1$

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant c_5 k \biggl[\prod_{j=1}^m b_j(k)\biggr]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \tag{27}$$

В силу леммы 2 и (27) для любого $k > s_{m+1}$ имеем

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant c_6 k^{-n(p-1)/(n-p)} \biggl[\prod_{j=1}^m b_j(k)\biggr]^{-(n-1)/(n-p)} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma n/(n-p)}.$$

Отсюда, учитывая неравенство $\sigma > (n-1)/n$ и используя лемму 1, получаем, что $u \in L^{n(p-1)/(n-p)}(\Omega)$.

Далее, положим

$$\gamma_2 = \gamma_1^{(n-1)/(n-p)} \biggl[\prod_{j=1}^m b_j(\gamma_1)\biggr]^{(n-1)/n(n-p)} [b_{m+1}(\gamma_1)]^{\sigma/(n-p)}$$

и зафиксируем $k > \gamma_2$.

Пусть ψ – функция на $(s_{m+1}, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (s_{m+1}, +\infty)$

$$\psi(s) = s^{n-1} \biggl[\prod_{j=1}^m b_j(s)\biggr]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s)]^{\sigma}.$$

Поскольку функция ψ непрерывна, $\psi(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ и $\psi(\gamma_1) < k^{n-p}$, то существует $k_1 > \gamma_1$ такое, что

$$\psi(k_1) = k^{n-p}. \tag{28}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} k_1^{-n(p-1)/(n-p)} \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k_1)\biggr]^{-(n-1)/(n-p)} & [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma n/(n-p)} \\ = k^{-p} k_1 \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k_1)\biggr]^{-(n-1)/n} & [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma} \\ = k^{-r} \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k_1)\biggr]^{-1} & [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma n/(n-1)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Кроме того, из (28) вытекает, что $k_1 < k$ и $k^{n-p} < k_1^{n+m+\sigma}$. Используя последнее неравенство, устанавливаем, что для любого $j \in \{1, \dots, m+1\}$

$$b_j(k) < \frac{n+m+\sigma}{n-p} b_j(k_1). \tag{30}$$

Из леммы 3 и соотношений (27), (29), (30) выводим, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geqslant k\} \leqslant c_7 k^{-r} \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\biggr]^{-1} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Полученный результат, неравенство $\sigma > (n-1)/n$ и лемма 1 позволяют заключить, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega |\nabla T_N(u)|^r \, dx \leqslant c_8. \tag{31}$$

В силу условия $p \geqslant 2 - 1/n$ имеем $r \geqslant 1$, а поскольку $p < n$, то $r < p$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем $T_N(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Отсюда, из принадлежности функции u пространству $L^r(\Omega)$, (31) и леммы 4 выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Тем самым теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть условия теоремы 1 выполнены. В силу (1)–(3) и теоремы 6.1 из [3] существует функция u на Ω такая, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и для любых $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $k_1 > k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \biggl\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla T_{k_1}(u))(D_i T_{k_1}(u) - D_i\varphi)\biggr\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-\varphi)\, dx. \tag{32}$$

Отсюда, учитывая (2), получаем, что для любого $k > 0$

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \leqslant \frac{1}{c_2} \int_\Omega |f|\, |T_k(u)| \, dx.$$

Теперь, учитывая (6) и используя теорему 2, заключаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Отсюда и из (1) вытекает, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу (32) и следствия 4.3 из работы [3] для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega \biggl\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) D_i\varphi\biggr\} dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Таким образом, функция u является слабым решением задачи (4). Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. Условие (6) на правую часть уравнения в рассматриваемой задаче (4) является лишь достаточным для существования слабого решения этой задачи, принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Действительно, покажем на примере оператора Лапласа (это соответствует случаю $p = 2$), что слабое решение задачи (4), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, может существовать и при более слабом ограничении на правую часть уравнения по сравнению с условием (6).

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_1 – функция класса $C^2((0, +\infty))$ такая, что $g_1 = 0$ на $[1/2, +\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-e})$

$$g_1(s) = \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-(n-1)/n} \left(\ln \ln \frac{1}{s}\right)^{-(2n-1)/n}.$$

Пусть еще u_1 и f_1 – функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_1(x) = |x|^{2-n} g_1(|x|), \qquad f_1(x) = (n-3)|x|^{1-n} g_1'(|x|) - |x|^{2-n} g_1''(|x|).$$

Нетрудно проверить, что функция u_1 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_1 \ \text{ в } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega,$$

при этом $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$; для любого $\sigma \in (0, (n-1)/n)$

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} [\ln \ln(e + |f_1|)]^{\sigma} \in L^1(\Omega),$$

но

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} [\ln \ln(e + |f_1|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$$

и, следовательно, функция f_1 не удовлетворяет условию (6).

В общей ситуации, рассмотренной в этой статье, потеря точности в условии на правую часть уравнения, обеспечивающем существование слабого решения задачи (4) из $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, происходит из-за того, что в основной теореме 2 при оценке интегралов функции Φ по множествам $\{\Phi > k^\gamma\}$ (см. (24)) интегралы функции

$$\Phi \left[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j + \Phi) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^{\sigma}$$

по тем же множествам оцениваются сверху единой константой, тогда как последовательность этих интегралов стремится к нулю при $k \to \infty$. Однако для функции Φ общего положения по-видимому невозможно дать квалифицированную оценку точности этого стремления к нулю в зависимости от k и тем самым воспользоваться надлежащим образом дополнительным множителем, сходящимся к нулю при $k \to \infty$, в правой части неравенства, огрублением которого явилось неравенство (24). Это оправдывает оценку упомянутых интегралов функции (33) только константой, хотя последнее, как уже было сказано, и приводит к некоторой потере точности в условии, обеспечивающем существование слабого решения рассматриваемой задачи, принадлежащего пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Наконец, приведем пример, когда правая часть уравнения имеет определенную “логарифмическую” суммируемость, но слабое решение соответствующей задачи Дирихле не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_2 – функция класса $C^2((0,+\infty))$ такая, что $g_2 = 0$ на $[1/2,+\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-1})$

$$g_2(s) = \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-(n-1)/n}.$$

Пусть еще u_2 и f_2 – функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_2(x) = |x|^{2-n} g_2(|x|), \qquad f_2(x) = (n-3)|x|^{1-n} g_2'(|x|) - |x|^{2-n} g_2''(|x|).$$

Тогда функция u_2 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_2 \ \text{ в } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega.$$

При этом для любого $\lambda \in [1,r)$ имеем $u_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$, но $|\nabla u_2| \notin L^r(\Omega)$ и, следовательно, $u_2 \notin \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Кроме того, для любого $\sigma \in (0,(n-1)/n)$ имеем $f_2[\ln(1+|f_2|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$, но $f_2[\ln(1+|f_2|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Boccardo L., Gallouët T. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.

[2] Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 641–655.

[3] Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.

[4] Boccardo L., Gallouët T. Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures // J. Convex Analysis. 1996. V. 3. P. 361–365.

[5] Ковалевский А. А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №3. С. 375–385.

[6] Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
22.06.2001
Исправленный вариант
08.04.2002